

# Kritik der Mengenlehre

© Viktor Weichbold (2012)

(1) Viele Mathematiker und Philosophen erachten die Mengenlehre als die Grundlagendisziplin der Mathematik und der Logik. Ich indessen halte sie für voller Unklarheiten und Widersprüche.<sup>1</sup> Folgende Kritikpunkte lege ich in diesem Essay dar:

- A) der Begriff der Menge ist dubios (d.h. die Mengenlehre verwendet verschiedene Mengenbegriffe);
- B) die Mengenlehre enthält Widersprüche und Paradoxien;
- C) das Konzept der "leeren Menge" hat absurde Konsequenzen.

## A) Der Begriff der Menge ist dubios

(2) In der Mengenlehre dreht sich alles um *Mengen*. Aber was ist eigentlich eine Menge? Was hat man sich darunter vorzustellen? Beginnen wir damit, die Bedeutung dieses Ausdrucks zu untersuchen.

Im alltäglichen Sprachgebrauch ist eine Menge eine *Vielheit* von gleichen Dingen. Zum Beispiel bilden 20 Pferde *eine Menge Pferde* oder 70 Bücher *eine Menge Bücher*. Diese 20 oder 70 Einzeldinge (Individuen) *konstituieren* die Menge. Man spricht daher von einer Menge nur, wenn mehrere Individuen vorhanden sind. Es bleibe dahingestellt, wie viele es mindestens sein müssen: drei, fünf oder mehr. Doch das ist sicher: ein einziges Individuum bildet noch keine Menge. Und schlechthin absurd wäre es, von einer Menge zu reden, wenn gar kein Individuum da ist. Der Ausdruck "leere Menge" wäre in der Diktion der Alltagssprache ein Widerspruch in adjecto: denn wo nichts ist, das eine Menge bilden könnte, kann keine Menge sein. Demnach ist "leere Menge" ein Unbegriff, so wie "seiendes Nichts" oder "wenig Vieles".

In der Mengenlehre ist indessen von "leerer Menge" die Rede – woraus folgt, dass der Ausdruck hier (sofern er sinnvoll gebraucht wird) eine andere Bedeutung besitzt. Das Adjektiv "leer" suggeriert, dass die Menge als eine Art *Behälter* konzipiert ist, der individuelle Dinge – hier: Elemente – in sich fasst. Leer ist dieser Behälter, wenn er ohne Elemente ist. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn die Dinge, die er enthalten sollte, nicht existieren, wie z.B. die *Zentauren* oder die *dreieckigen Kreise*: ihre Mengen sind leer.

Diese Sichtweise impliziert, dass die Menge unabhängig von ihren Elementen existiert. Demnach wird die Menge nicht aus den Elementen *konstituiert*,

---

<sup>1</sup> Der Essay enthält Gedanken, die zuvor in verschiedenen Essays verstreut waren ("Über leere Mengen" / "Grundprobleme der mathematischen Logik" / "Antinomien, die keine sind"). Dazu veranlasst hat mich der Fund, dass bereits 1982 der Mathematiker und Philosoph **G. Bealer** in seinem Buch "Quality and Concept" die Mengenlehre kritisiert hat – mit Argumenten, die meinen eigenen sehr ähnlich sind (ohne dass ich sein Buch vorher kannte). Ich bin beeindruckt von dieser Übereinstimmung und erkenne darin eine gewisse Berechtigung und Triftigkeit meiner Überlegungen.

sondern sie besteht an sich – und unabhängig davon, ob ihre Elemente existieren oder nicht.

Die Mengenlehre hat also einen eigenen Begriff von "Menge", den wir als "mengentheoretischen" bezeichnen wollen.

(3) Nun zeigt sich, dass die Mengenlehre ihren Begriff aber nicht konsequent durchhält. Des Öfteren wechselt sie zum alltagssprachlichen Mengenbegriff über, wenn dadurch ihre Rechenoperationen vereinfacht werden.

Nehmen wir als Beispiel die Bildung von Vereinigungsmengen oder Potenzmengen. Nach offizieller Diktion ergibt die Vereinigung der Mengen  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  und  $\{c\}$  die Vereinigungsmenge  $V: \{a,b,c\}$ .

Das ist sonderbar. Denn man würde erwarten – da die Mengen existierende abstrakte Behälter sind –, dass auch sie in die Vereinigungsmenge eingehen. Die korrekte Notation müsste also lauten:

$V: \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$  oder  $V: \{a,b,c,\{ \},\{ \},\{ \}\}$ .

Die Mengenklammern (als Symbole für die abstrakten Behälter) müssten jedenfalls in der Rechnung berücksichtigt werden. Das ist aber nicht der Fall: die Mengen lösen sich in Nichts auf, wenn ihre Elemente vereinigt werden.

Das ist wie Zauberei – aber der Trick (bzw. Fehler) ist durchschaubar: er besteht darin, dass "Menge" urplötzlich im alltagssprachlichen Sinn aufgefasst wird: als bloßes Akkumulat aus Elementen, und nichts anderem.

## **B) Die Mengenlehre enthält Widersprüche und Paradoxien**

(4) Die mengentheoretische Auffassung von der Menge führt obendrein zu Widersprüchen. Betrachten wir dazu – zum Zweck eines Beispiels – das bekannte Theorem:

→Zwei Mengen sind identisch, wenn sie dieselben Elemente enthalten.<sup>2</sup>

Angewandt auf leere Mengen besagt dieses Theorem, dass es eine leere Menge gibt bzw. dass alle Namen für Mengen, die nichts enthalten, dasselbe bezeichnen: die eine leere Menge.

Nun sagt aber ein anderes Theorem (oder Axiom?), dass die leere Menge *Teilmenge jeder Menge* ist – also auch ihrer selbst. Daraus folgt, dass es mindestens zwei leere Mengen gibt: die leere Menge als Grundmenge, und die leere Menge, insofern sie Teilmenge der leeren Grundmenge ist. Also gibt es zugleich eine und mehrere leere Mengen.

---

<sup>2</sup> Dieses Theorem ist schwer zu interpretieren, zumal der Ausdruck "identisch" unklar ist. Gemeint ist offenbar folgendes: verschiedene *Namen* für Mengen bezeichnen die gleiche Menge, wenn sie dieselben Elemente bezeichnen. In dieser Hinsicht sind z.B. "die Menge der unverheirateten Männer" und "die Menge der Junggesellen" identisch, weil sie für die gleichen Elemente bezeichnen.

(5) Natürlich wird der Mengentheoretiker hierzu einwenden: dass es nur eine leere Menge gibt und diese mit sich identisch ist, sodass die leere Menge auch als *Teilmenge ihrer selbst* ein und dieselbe Menge ist.

Aber dann muss er sich die Frage gefallen lassen, ob er noch rational redet – oder nur Wortgefasel von sich gibt. Denn die Ausdrücke "Teil" und "Ganzes" haben feste Bedeutungen, die man nicht einfach außer Kraft setzen kann: ein Teil ist etwas anderes als das Ganze, und umgekehrt. Werden die beiden identifiziert (womit ihre Unterscheidung aufgehoben wird), dann ist die Rede von einer "Teilmenge" sinnlos.

Umgekehrt: die sinnvolle Verwendung von "*Teilmenge*" setzt voraus, dass ein Teil etwas anderes ist als das Ganze. Diese Voraussetzung wird aber durch den obigen Einwand des Mengentheoretikers zunichte.

(6) Des Weiteren sind die Ausdrücke "Teilmenge ihrer selbst" sowie "sich selbst enthalten" *irrational*. Was soll man sich darunter vorstellen? Nichts und niemand kann *sich selbst enthalten* – so wenig, wie eine Schlange sich selbst auffressen kann oder wie der heilige Christophorus die ganze Welt trägt und zugleich auf ihr steht.

Der irrationale Ausdruck "sich selbst enthalten" führt bekanntlich zu Antinomien, und auch zu Paradoxien (eine Paradoxie ist das gleichzeitige Bestehen unvereinbarer Zustände). Eine davon ist die Paradoxie der obersten Allklasse, die am Beispiel des Universums veranschaulicht werden kann:

Das Universum ist die Gesamtheit der Dinge: es enthält alles, was es gibt. Das Universum enthält folglich auch die Menge der Universen (die genau 1 Element enthält). Die Menge der Universen enthält ihrerseits das Universum. Nun stellt sich die Frage: wer enthält wen:

- das Universum die Menge der Universen oder
- die Menge der Universen das Universum?

Laut Mengenlehre trifft beides zu: eine Paradoxie.

### **C) Das Konzept der leeren Menge hat absurde Konsequenzen**

(7) Betrachten wir die *Menge der Einhörner* und die *Menge der Zentauren* (Wir brauchen dazu ein geistiges Auge, das auch Nichtexistentes sieht). Beide Mengen sind leer; d.h., es ist im Grunde ein und dieselbe (leere) Menge, die hier vorliegt. Wenn aber nur eine einzige leere Menge vorliegt: worauf beruht dann die Unterscheidung von *Menge der Einhörner* und *Menge der Zentauren*?

Anders gefragt: wenn ich einen leeren Sack vor mir habe – wie kann feststellen, ob es ein leerer Sack *Äpfel* oder ein leerer Sack *Nüsse* ist? Es ist doch nur ein leerer Sack. Nichts – absolut nichts – gibt mir einen Anhaltspunkt dafür, dass seine Leere als Fehlen von *Äpfeln*, *Nüssen*, *Rüben*, *Krautköpfen* oder was immer gedeutet werden könnte.

Das ginge nur, wenn der leere Sack irgendeine Kennzeichnung trägt, die ihn als *Sack für Äpfel* ausweist (z.B. eine Beschriftung). Nur dann weiß ich, was in

dem Sack sein soll – und kann ihn als leeren Sack Äpfel (*leere Menge Äpfel*) bezeichnen.

Das heißt: mengentheoretische Formulierungen wie "die Menge der X ist leer" implizieren, dass die leeren Mengen eine solche Kennzeichnung besitzen, denn sonst wäre es gar nicht möglich, sie als "leere Menge X" zu identifizieren. Daraus folgt, dass es nicht nur eine leere Menge gibt, sondern dass es viele – ja, unendlich viele leere Mengen geben muss: nämlich für alle (möglichen und unmöglichen!) nicht-existenten Dinge. Das aber ist eine reichlich absurde Konsequenz.