

# Über leere Mengen

© Viktor Weichbold (2011)

## I.

(1) Angenommen, auf dem Tisch vor mir liegt eine *Menge Nüsse*. Ich beginne, Nuss um Nuss zu essen, und nach einiger Zeit sind alle weg. – Liegt jetzt eine *leere Menge* vor mir?

So ist es, versichern uns gewisse Mathematiker. Jedoch wehrt sich der gesunde Menschenverstand sehr, die Dinge so zu sehen. Denn, bitte, wo wäre die leere Menge? Wo könnte man sie anfassen, ansehen, riechen, betasten, schmecken oder hören? Wie zählen, wägen oder messen? Wenn all das nicht möglich ist: was unterscheidet die leere Menge vom *Nichts*?

(2) Ein schneller Einwand gegen diese Kritik könnte lauten: die leere Menge ist nur eine *gedankliche* Entität. Sie ist ein begriffliches Konstrukt unseres Denkens zu dem Zweck, Denkprozesse zu vereinfachen. Sie ist also ein *Begriff*; und so wenig, wie wir Begriffe anfassen, riechen, messen, etc. können, so wenig können wir dies mit der leeren Menge tun.

Wer so argumentiert, begeht den Fehler einer Quaternio terminorum: er wechselt innerhalb des Arguments die Bedeutung von "Menge". Denn die Menge Nüsse, die vorhin am Tisch lag, war ein *physisches* Objekt. Jetzt aber soll die Menge – als leere – nur mehr ein *gedankliches* Objekt sein.

(3) Unsere Sprache legt die Bedeutung von "Menge" eindeutig so fest, dass damit eine *Vielheit* gemeint ist. Eine Vielheit besteht, wie der Name sagt, aus *vielen*. Zwar gibt es kleine Vielheiten (Mengen) und große Vielheiten – aber es gibt keine Vielheit, die aus nichts besteht.

In diesem Sinn ist der Begriff der Menge unabänderlich an eine Stückzahl von Individuen gebunden. Man kann darüber streiten, wie groß die Stückzahl sein muss, damit eine *Menge* vorliegt: ob zwei, drei oder mehr. Aber fest steht, dass eine Menge (als ontologische Realität) erst durch eine größere Anzahl von Individuen konstituiert wird. Ohne Individuen besteht – existiert – keine Menge. Eine Menge, die aus nichts besteht, ist ein Unding: so wie ein Messer ohne Klinge, an dem der Griff fehlt.

Wer also die zwanzig Nüsse, die vor ihm auf dem Tisch liegen, als eine Menge bezeichnet, der muss, nachdem er alle verspeist hat, richtigerweise sagen: "die Menge existiert nicht mehr." Wo nichts ist, das eine Menge bilden könnte, kann notwendig keine Menge sein.

## II.

(4) Gewisse Mathematiker und Philosophen sehen das anders. Sie verändern die Bedeutung von "Menge" auf subtile Weise, sodass sie von *leeren Mengen* reden können. Ihnen zufolge ist eine Menge nicht eine Anhäufung von Individuen,

sondern eine *abstrakte Realität*: eine Größe, die unabhängig von Individuen besteht. Nicht die Individuen konstituieren die Menge, sondern die Menge besteht an sich, und die Individuen gehören ihr an ("sind ihr Element"). Zum Beispiel ist es nicht so, dass Sokrates, Plato, Aristoteles und Zenon eine Menge Menschen bilden, sondern umgekehrt: sie sind jeweils Element der Menge *Mensch*. Hier ist die Menge das logisch und ontologisch Vorgeordnete, und das Individuum das ihr Nach- und Zugeordnete. Offenbar wird das Individuum erst durch die Zugehörigkeit zu einer Menge zu einem bestimmten Individuum, z.B. zu einem Menschen.

(5) Diese Auffassung ist sehr sonderbar und widerspricht dem logisch richtigen Gebrauch der Sprache. Das lässt sich an Beispielen leicht veranschaulichen. Man nehme eine *Schafherde*: in diesem Fall machen nicht die Schafe die Herde, sondern die Zugehörigkeit zur Herde macht das Schaf. Und wenn ein Wolfsrudel alle Schafe gerissen hat, dann kann der Hirt nicht den Verlust der *Herde* beklagen: diese bleibt ihm weiterhin erhalten – als leere. Auch wäre es nicht so, dass viele Bäume einen *Wald* bilden, sondern: wo keine Bäume stehen, dort ist bloß der Wald leer. Und Glatzenträger haben eine leere Menge *Haare* auf ihrem Haupt.

(6) Die Sicht, dass es Mengen unabhängig von Individuen gibt, die sie konstituieren, hat auch seltsame Konsequenzen. Betrachten wir wieder ein Beispiel:

Gesetzt, ich habe einen Sack Nüsse und einen Sack Mandeln. Ich esse beide leer. Was bleibt über? Doch nicht ein *leerer Sack Nüsse* und *leerer Sack Mandeln*, sondern zwei leere Säcke. Wenn ich die beiden mit geschlossenen Augen in meinen Händen ein paar Mal hin- und hertausche, weiß ich nicht mehr, welcher für die Nüsse und welcher für die Mandeln war. Die zwei leeren Säcke sind – im Hinblick auf ihren ursprünglichen Inhalt – nicht voneinander zu unterscheiden: war dieser für die Nüsse, oder jener? Sie sind zwei völlig gleiche leere Säcke.

Selbiges gilt für zwei leere Mengen: sie sind leer *von allem und jedem*. Es gibt nichts, woran sie unterschieden werden können. Wenn es nun nichts gibt, was sie voneinander unterscheidet, dann sind sie miteinander identisch. Woraus folgt, dass alle leeren Mengen miteinander identisch sind.

Diese Konsequenz ist letal für jene Position der (logischen) Semantik, die abstrakte Mengen (= Klassen) als Extensionen von allgemeinen Termini annimmt. Die Extension von z.B. "Heinzelmännchen" ist leer; ebenso die von "Antipoden". Da leere Extensionen miteinander identisch sind, bedeutet nach dieser Auffassung "Heinzelmännchen" das gleiche wie "Antipode".

(7) Um das Problem der Ununterscheidbarkeit leerer Mengen zu lösen, muss der Mengenrealist Zuflucht nehmen zu einer bestimmten Hypothese. Er muss annehmen, dass alle Mengen – unabhängig von ihren Individuen – ein identifizierendes Merkmal besitzen: ein Kennzeichen, wodurch sie als *Menge der X* ausgewiesen werden, auch wenn sie kein X enthalten.

Veranschaulichen wir dies wieder am Beispiel die leeren Säcke. Solange jeder Sack dem anderen völlig gleicht (indem er ein formloser leerer Behälter ist), lässt sich keiner vom anderen unterscheiden. Steht aber auf jedem Sack drauf, wofür er bestimmt ist – auf dem einen "Nüsse", auf dem anderen "Mandeln",

usw. – dann werden die Säcke unterscheidbar. Dann lässt sich auch sinnvoll sagen: "Der Sack, der Mandeln enthalten sollte, ist leer" oder einfacher: "Der Mandelsack ist leer."

Gemäß dieser Zusatzannahme sind alle Mengen an sich gekennzeichnet: als *Menge der X*, *Menge der Y*, *Menge der Z*, usw. Und sie existieren unabhängig davon, ob es individuelle X, Y, Z, ... gibt: denn sie bestehen auch ohne ihre Elemente: eben als leere Menge der X, Y, Z.

Das hat eine sonderbare Konsequenz. Denn nun muss man annehmen, dass zu jedem Ding eine Menge existiert – ob es das Ding gibt oder nicht. Schließlich macht die Menge das Ding, nicht die Dinge die Menge. Damit ein Ding zum einem X, Y, Z, etc. wird, muss eine Menge existieren, deren Element es ist, und ohne diese Menge ist es – ein unbennbares Nichts.

Also existiert zu jedem Ding eine Menge – egal, ob dasselbe existiert oder nicht. Zwar gibt es keine Einhörner, wohl aber die Menge der Einhörner (und sie ist leer). Gleichfalls existieren keine Zyklopen, Nymphen, Sirenen, Kobolde, usw., wohl aber ihre leeren Mengen. Dies gilt nicht bloß für Fabelgestalten, sondern für alle erdenklichen Fiktionen. Zwar gibt es nicht Menschen mit zwei, drei, vier, etc. Köpfen; doch es gibt die leeren Mengen der solcherart Missgebildeten. Und auch mit den *unmöglichen* Fiktionen verhält es sich so: zwar gibt es keine viereckigen Kreise, aber die leere Menge dieser sonderbaren Gebilde.

**(8)** Es wird noch sonderbarer. Selbst bei Dingen, die absolut einzig sind – wie das Universum oder Gott –, muss zuerst eine Menge existieren, damit die Dinge benennbar werden. Die Menge der Götter enthält, den Monotheisten zufolge, genau ein Element. Falls dieses nicht existiert, existiert doch wenigstens die leere Göttermenge – anscheinend seit Ewigkeit. Falls ein Gott existiert, ist er ein Element der Göttermenge: diese besteht unabhängig von ihm, und sie wurde von ihm nicht geschaffen oder ins Dasein gesetzt. Sie entzieht sich jeglicher Verfügbarkeit.

Was das Universum betrifft, so ergibt sich hier die bekannte Russell'sche Antinomie: die Menge der Universen enthält das Universum als ihr (einziges) Element. Das Universum aber enthält alles, was existiert: auch die Menge, die es selber enthält. Diese Antinomie ist mit der Russell'schen Typentheorie nicht zu vermeiden.

**(9)** Betrachten wir eine weitere Merkwürdigkeit, die den abstrakten Mengen anhaftet: sie lösen sich in Nichts auf, wenn sie nicht mehr gebraucht werden. Diese Eigenschaft kommt gewissen Logikern sehr zugute, nämlich jenen, die die Bedeutung von allgemeinen Begriffen als *Extension* auffassen. Sie meinen mit „Extension“ eine abstrakte Menge (die sie auch als „Klasse“ bezeichnen). Demnach ist die Bedeutung von z.B. „Hund“ dessen Extension, also die abstrakte Menge, die alle Hunde der Welt als Elemente enthält, und die Bedeutung von „Katze“ jene abstrakte Menge, die alle Katzen der Welt umfasst.

Was aber ist die Bedeutung von „Tier“? Der Extensionalist würde antworten: die Extension dieses Terminus, also die abstrakte Menge, die alle Tiere der Welt umfasst.

Stimmt das? Betrachten wir die Sache im Detail. Genau besehen ist „Tier“ ein Überbegriff über verschiedene Gattungen, wie Elefanten, Pferde, Ameisen, Igel, usw. Folgerichtig müsste die Extension von „Tier“ die Gesamtheit aller abstrakten Mengen sein, die die Extension der einzelnen Tiergattungen bilden. Mit anderen Worten: die Extension ist hier *eine Menge aus abstrakten Mengen*. Sofern diese abstrakten Mengen auch die Individuen enthalten, ist die Extension von „Tier“ ein Konglomerat aus abstrakten Mengen und individuellen Tieren. Das klingt sehr sonderbar, folgt aber unweigerlich aus der Auffassung, dass die abstrakten Mengen eine Art von Behälter sind, die Elemente *enthalten*. Daher enthält eine Menge aus Mengen immer beides: die Individuen der Einzelmengen und die Behälter (= abstrakte Mengen), die ja an sich und unabhängig von den Individuen bestehen.

Diese Konsequenz wird von den Logikern natürlich nicht zugestanden (oder nicht gesehen): ihnen zufolge besteht eine höhere Menge immer nur aus den *Elementen* der niedrigeren Mengen. Die abstrakten Mengen (Behälter) lösen sich in Nichts auf, wenn sie in größere Mengen eingegliedert werden. Das grenzt allerdings an Zauberei.<sup>1</sup>

(10) Zusätzlich zu diesen Problemen hat der Mengenrealismus noch ein weiteres: das der Existenz der Mengen. Da die abstrakten Mengen nicht durch Individuen konstituiert werden, sondern unabhängig von diesen bestehen, stellt sich die Frage: wie ist dieses *Bestehen* vorzustellen? Offenbar ist der Mengenrealismus immer auch ein Platonismus, der eine eigenständige Existenz der (unendlich vielen) abstrakten Mengen annehmen muss. Bloß: wie? Und wo? Werden Mengenrealisten mit dieser Frage konfrontiert, neigen sie dazu, sie für sinnlos zu erklären<sup>2</sup>.

Aber das ist nur eine Ausflucht: eine quasi-philosophische Methode der Einsichtsverweigerung. Man erklärt Fragen für sinnlos, wenn sie unangenehm oder bedrohlich sind. So wenig philosophisch diese Haltung ist, so wenig kann sie das Ergebnis unserer Untersuchung erschüttern oder verhindern: dass die Rede von leeren Mengen *irrational* ist.

---

<sup>1</sup> Dem Extensionalisten zufolge ist eine Menge *aus leeren Mengen* selber leer. Sie enthält nicht etwa die leeren Mengen (Behälter) als solche, sodass man z.B. sagen könnte: die Menge der Fabelwesen umfasst (die leeren Behälter der) Kobolde, Kentauren, Sirenen, etc. Da sich diese "Behälter" bei ihrer Zusammenführung in Nichts auflösen, ist innerhalb der Fabelwesenmenge keine Differenzierung möglich.

<sup>2</sup> So z.B. Carnap, in "Über abstrakte Wesenheiten", abgedruckt als Anhang zu seinem Buch "Bedeutung und Notwendigkeit".