

Über leere Mengen

© Viktor Weichbold (2011, 2012)

Zusammenfassung

Der Ausdruck "Menge" wird in zweifacher Bedeutung gebraucht:

- a) im gewöhnlichen Sinn (Alltagssprache) ist eine Menge eine *Vielheit von Individuen*, wobei die Menge durch die Individuen konstituiert wird (ohne Individuen keine Menge).
- b) im alternativen Sinn (Mengenlehre) ist eine Menge ein *abstrakter Behälter*, der Individuen (Elemente) enthält oder auch – wenn ohne Individuen – leer sein kann (leere Menge).

Das Konzept der leeren Menge erzeugt logische und sprachphilosophische Probleme, die den Mengenbegriff der Mengenlehre unhaltbar machen.

I.

(1) Angenommen, vor mir liegt eine *Menge Nüsse*. Ich beginne, Nuss um Nuss zu essen, und nach einiger Zeit sind alle weg. – Liegt jetzt eine *leere Menge* vor mir?

So ist es, versichern uns gewisse Mathematiker und Philosophen. Jedoch wehrt sich der gesunde Menschenverstand sehr, die Dinge so zu sehen. Denn, bitte, wo ist die leere Menge? Wie kann ich sie anfassen, ansehen, betasten, riechen, schmecken oder hören? Wie zählen, wägen oder messen? Wenn all das nicht möglich ist: was unterscheidet die leere Menge vom *Nichts*?

(2) Eine schnelle Abwehr dieser Kritik könnte lauten: die leere Menge ist nur eine *gedankliche* Entität. Sie ist ein begriffliches Konstrukt unseres Denkens zu dem Zweck, Denkprozesse zu vereinfachen. Sie ist also ein *ideelles Gebilde*; und so wenig, wie wir ideelle Gebilde (z.B. Begriffe) anfassen, riechen, messen, etc. können, so wenig können wir dies mit einer leeren Menge tun.

Aber diese Abwehr begeht einen logischen Fehler: sie wechselt innerhalb des Arguments die Bedeutung von "Menge". Denn die Menge Nüsse, die vorhin am Tisch lag, war ein *physisches* Objekt. Jetzt aber soll die Menge – als leere – nur mehr ein *gedankliches* Objekt sein.

Wäre eine Menge tatsächlich ein rein gedankliches Objekt, dann könnte ich sie nicht verspeisen. Die Aussage, dass ich *eine Menge Nüsse* gegessen habe, wäre gar nicht sinnvoll. – Das Problem ist also nicht so einfach zu lösen; betrachten wir es im Detail!

(3) Der reguläre Gebrauch unserer Sprache legt die Bedeutung von "Menge" eindeutig fest: es ist eine *Vielheit* gemeint. Eine Vielheit besteht, wie der Name sagt, aus *vielen*. Es gibt kleine Vielheiten (Mengen) und große Vielheiten – aber es gibt keine Vielheit, die aus nichts besteht.

So gesehen ist das Vorliegen einer Menge unweigerlich an das Vorhandensein von Individuen gebunden. Man kann darüber streiten, wie viele es mindestens sein müssen: zwei, drei oder mehr. Aber feststeht, dass eine Menge erst durch eine Stückzahl von Individuen realisiert wird. Ohne Individuen besteht –

existiert – keine Menge. Eine Menge, die aus nichts besteht, ist ein Unding: so wie ein Messer ohne Klinge, an dem der Griff fehlt.

Wer also die zwanzig Nüsse, die vor ihm auf dem Tisch liegen, als eine *Menge* bezeichnet, der muss, nachdem er alle verspeist hat, richtigerweise sagen: "die Menge existiert nicht mehr." Wo nichts ist, das eine Menge bilden könnte, kann notwendig keine Menge sein.

II.

(4) Gewisse Mathematiker und Philosophen sehen das anders. Sie umgehen die reguläre Redeweise, welche lautet: "eine Menge *besteht* aus Elementen", und sagen stattdessen: "eine Menge *enthält* Elemente". Damit verändern sie die Bedeutung von "Menge" auf subtile Weise. Denn die Menge, die Elemente *enthält*, ist nicht ein Gebilde aus diesen Elementen, sondern ein Behälter für diese Elemente. Damit wird es möglich, von einer *leeren Menge* zu reden: wenn der Behälter ohne Inhalt ist.

Nach dieser Diktion ist eine Menge also nicht eine Anhäufung von Individuen, sondern ein *abstrakter Eimer*. Obendrein ist sie eine Größe, die unabhängig von den Individuen besteht – sonst wäre die Rede von einer *leeren Menge* nicht möglich. Nicht die Individuen konstituieren die Menge, sondern die Menge besteht an sich, und die Individuen gehören ihr an. Diese Position heißt "Mengenrealismus" und wird von vielen Mathematikern und Philosophen vertreten.

Ihnen zufolge ist es nicht so, dass Petrus, Andreas, Johannes, Jakobus, usw. die Menge der Apostel konstituieren, sondern umgekehrt: sie sind jeweils Element der Apostelmenge. Oder: die endlosen Baustellen, die entlang einer Autobahn den Verkehr behindern, bilden nicht *eine Menge Baustellen*, sondern umgekehrt: es gibt eine Baustellenmenge, und die einzelne Baustelle gehört ihr als Element an.

(5) Die Sichtweise, dass Mengen (ontologisch) von ihren Elementen unabhängig bestehen, ist sehr sonderbar und widerspricht dem rationalen Gebrauch der Sprache. Das lässt sich an Beispielen verdeutlichen.

Man nehme eine *Schafherde*: der Hirt, der die Herde beaufsichtigt, beaufsichtigt demnach einen abstrakten Behälter, der Schafe in sich enthält. Und wenn ein Wolfsrudel (ebenfalls ein abstrakter Behälter) alle Schafe gerissen hat, dann kann der Hirt nicht den Verlust der *Herde* beklagen: diese bleibt ihm weiterhin erhalten – als leere. Auch ist es nicht so, dass viele Bäume einen *Wald* bilden, sondern: wo keine Bäume stehen, ist bloß der Wald leer. Und Glatzenträger haben eine leere Menge Haare auf ihrem Haupt.

(6) Die Sicht, dass Mengen unabhängig von Individuen bestehen, hat auch seltsame Konsequenzen. Betrachten wir wieder ein Beispiel: Gesetzt, ich habe einen Sack Nüsse und einen Sack Mandeln. Ich esse beide leer. Was bleibt über? Doch nicht ein *leerer Sack Nüsse* und *leerer Sack Mandeln*, sondern zwei leere Säcke. Wenn ich die beiden mit geschlossenen Augen in meinen Händen ein paar Mal hin- und hertausche, weiß ich bald nicht mehr, welcher für die Nüsse

und welcher für die Mandeln war. Die zwei leeren Säcke sind – im Hinblick auf ihren Inhalt – nicht mehr voneinander zu unterscheiden: war dieser für die Nüsse, oder jener? Sie sind zwei völlig gleiche leere Säcke.

Selbiges gilt für leere Mengen: sie sind leer *von allem und jedem*. Es gibt nichts, worin sie sich unterscheiden und folglich, woran sie unterschieden werden können. Daraus folgt, dass die leeren Mengen allesamt gleich sind: völlig gleichartig beschaffene Behälter.

(7) Diese Konsequenz (die aus dem mengenrealistischen Mengenbegriff eindeutig folgt!) wirft mehrere Probleme auf. Zum Einen: wie können die leeren Mengen voneinander unterschieden werden, wenn sie sich in nichts unterscheiden (so wie der leere Nuss- und Mandelsack)? Zum Anderen: wenn sie sich in nichts unterscheiden, was rechtfertigt dann ihre unterschiedliche Benennung – als "Menge der Kobolde", "Menge der quadratischen Kreise", "Menge der Zentauren", usw.?

Und drittens: wenn zu allem, was gedacht werden kann und nicht existiert, eine leere Menge besteht, dann muss es unendlich viele leere Mengen geben. Zwar gibt es keine Einhörner, wohl aber die Menge der Einhörner (und sie ist leer). Gleichfalls existieren keine Zyklopen, Nymphen, Sirenen, Marsmenschen, usw., wohl aber ihre leeren Mengen. Dies gilt für alle erdenklichen Fiktionen: es gibt zwar keine Menschen mit zwei, drei, vier, etc. Köpfen, doch es gibt die leeren Mengen der solcherart Missgebildeten. Auch mit den *unmöglichen* Fiktionen verhält es sich so: zwar gibt es keine dreieckigen Kreise, aber die leere Menge dieser sonderbaren Gebilde. Kurzum: das Universum muss prall gefüllt sein mit Mengen und leeren Mengen, und da es unendlich viele leere Mengen gibt, muss das Universum unendlich sein (wie kann es dann selber in einer Menge enthalten sein?).

(8) Allen diesen Problemen und Fragen weicht der Mengenrealist aus, indem einen Trick anwendet. Er argumentiert so: Dinge, die sich nicht voneinander unterscheiden, sind identisch. Da die leeren Mengen sich nicht voneinander unterscheiden, sind sie allesamt identisch. Mit anderen Worten: es gibt nur eine einzige leere Menge, und diese ist die leere Menge von allem: der Kobolde, der Zentauren, der quadratischen Kreise, der Heinzelmännchen, usw. – Tatsächlich ist dies die Ansicht der Mengenrealisten: dass es nur eine einzige leere Menge gibt.

Doch dieses Argument beruht auf einem Fehler: auf dem Wechsel in das alltagssprachliche Konzept der Menge. Beim alltagssprachlichen Konzept – wo "Menge" eine Quantität bezeichnet – läuft es tatsächlich auf das Gleiche hinaus, ob man *keinen Kobold* hat oder *keinen quadratischen Kreis* oder *kein Geld*: in allen Fällen hat man nichts. Daher kann man korrekterweise sagen: kein Kobold und kein Geld ist dasselbe (sind identisch).

Redet man aber von Mengen im Sinne von *leeren Behältern*, dann verhält sich die Sache ganz anders. Dann gilt nicht, dass zwei leere Behälter – bloß weil sie nicht unterscheidbar sind – miteinander identisch sind. Darin liegt der Fehler (oder Trick) des Mengenrealisten: dass er, der zuvor von *Behältern* geredet hat,

jetzt plötzlich wieder von *Elementen* redet und deren Nullzahl für identisch mit der Nullzahl der Elemente eines anderen Behälters erklärt.

(9) So entsteht die Ansicht, dass es nur eine einzige leere Menge gibt, die die leere Menge von allem und jedem ist. Doch auch diese Ansicht wirft viele Probleme auf. Unter anderem die Frage: was ist die Grundlage dafür, dass die eine leere Menge einmal "Menge der Kobolde" genannt wird, dann wieder "Menge der Zentauren", dann wieder anders, usf.? Ja, dass die leere Menge mit unendlich vielen Namen belegt werden darf? Und überhaupt: was rechtfertigt ihre Benennung als "Menge", wo sie doch ein Nichts ist? Könnte sie nicht ebenso gut "Puzifu" heißen, oder (wie traditionell) "das Nichts"?

(10) Auch wenn es der Mengenrealist nicht zugibt: im Geheimen unterstellt er, dass es doch viele leere Mengen gibt. Denn sonst könnte er sie nicht sprachlich differenzieren und sinnvoll über sie reden. Sonst wären ja auch ihre sämtlichen Namen füreinander austauschbar und es wäre bspw. zulässig zu sagen: "Die Menge der Zentauren ist eine Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen" (da die leere Menge eine Teilmenge jeder Menge ist). Indem er bestreitet, dass die Zentauren zu den natürlichen Zahlen gehören, muss der Mengenrealist voraussetzen, dass leere Mengen (irgendwie) voneinander unterscheidbar sind.

Das gilt auch für die extensionalistische Bedeutungstheorie. Sie besagt, dass die Bedeutung eines Namens seine Extension ist: die *Menge* der Individuen, auf die er anwendbar ist. "Menge" (bisweilen auch "Klasse") wird dabei im mengentheoretischen Sinn aufgefasst: als abstrakte Größe. Die Bedeutung eines Namens ist also der ideelle Behälter, der die Elemente umfasst, die mit diesem Namen benannt werden. Aber dazu muss der Behälter irgendeine Kennzeichnung besitzen, die ihn von anderen Behältern unterscheidet: denn sonst gäbe es (weil alle Behälter gleich beschaffen sind) keine Unterschiede in der extensionalen Bedeutung.¹

III.

(10) Der mengentheoretische Mengenbegriff hat noch weitere dubiose Konsequenzen, nicht nur hinsichtlich der leeren Mengen. Zum Beispiel bei Dingen mit besonderen Eigenschaften, wie Gott oder dem Universum. Was Gott betrifft, so gilt er als Urgrund aller Dinge, d.h. er ist der Grund dafür, dass die Welt existiert. Das gilt aber nicht für die *Menge* der Götter: diese Menge muss irgendwie unabhängig von ihm sein, denn sonst könnte sie ihn nicht enthalten. Pointierter gefragt: was war vorher da: Gott oder die Menge der Götter?

Was das Universum betrifft, so ergibt sich hier eine unlösbare Variante der Russell'schen Antinomie: das Universum enthält alles, was es gibt – aber es ist selber in der Menge der Universen enthalten. Also enthält es doch nicht alles, was gibt – folglich ist es kein Universum und die Menge der Universen ist leer. Dieser Widersinn lässt sich mit keinem Mittel beheben.

(11) Betrachten wir noch eine weitere merkwürdige Eigenschaft, die die abstrakten Mengen besitzen: sie lösen sich in Nichts auf, wenn sie nicht mehr

¹ Auf die Ungereimtheiten, die die extensionale Bedeutungstheorie bei Namen für nicht-existente Individuen aufwirft (deren Bedeutung die leere Menge ist) wollen wir hier nicht eingehen.

gebraucht werden. Diese Eigenschaft kommt den Logikern sehr zugute: nämlich denen, die die Bedeutung von Allgemeinbegriffen als *Extension* auffassen. Sie meinen mit "Extension" die *Menge* der Individuen, auf die der Begriff zutrifft, also die Menge der Hunde im Falle von "Hund". Dabei ist immer von der Menge als dem *abstrakten Behälter* die Rede.²

Die Bedeutung von "Hund" ist also – nach Ansicht dieser Logiker – die abstrakte Menge, die alle Hunde enthält; und die Bedeutung von "Katze" ist die abstrakte Menge, die alle Katzen enthält. – Was aber ist die Bedeutung von "Tier"? Der Extensionalist antwortet darauf: na, eben die Extension von "Tier", also die abstrakte Menge, die alle Tiere der Welt enthält.

Stimmt das? Betrachten wir die Sache im Detail. Genau besehen ist "Tier" ein Überbegriff über verschiedene Gattungen, etwa der Hunde, Katzen, Elefanten, Igel, Pferde, Ameisen, usw. Folgerichtig muss die Extension von "Tier" die Gesamtheit der abstrakten Mengen sein, die die Extension der einzelnen Tiergattungen bilden. Mit anderen Worten: die Extension ist hier *eine Menge aus abstrakten Mengen*.

Sofern diese abstrakten Mengen auch die Individuen enthalten, ist die Extension von "Tier" ein Gemisch aus abstrakten Mengen und individuellen Tieren. Das klingt sehr sonderbar, folgt aber unweigerlich aus der Auffassung, dass die abstrakten Mengen eine Art von Behälter sind, die Elemente *enthalten*. Daher enthält eine Menge aus Mengen immer beides: die Individuen der Einzelmengen und ihre Behälter (, die ja unabhängig von den Individuen bestehen).

Diese Konsequenz wird von den Logikern natürlich nicht zugestanden (oder nicht gesehen): ihnen zufolge besteht eine höhere Menge immer nur aus den *Elementen* der niedrigeren Mengen. Die abstrakten Mengen (Behälter) lösen sich in Nichts auf, wenn sie in größere Mengen eingegliedert werden. Das grenzt allerdings an Zauberei.³

IV.

(12) Zusätzlich zu den bisherigen Problemen hat der Mengenrealist noch ein weiteres: das der *Existenz* der Mengen. Da die abstrakten Mengen nicht durch Individuen konstituiert werden, sondern unabhängig von ihnen bestehen, müssen sie eigenständig existieren. Besonders die Rede von *leeren Mengen* impliziert die Annahme ihrer Existenz: denn wie könnte man von einem Ding, das nicht existiert, behaupten, dass es leer ist? Eine solche Behauptung wäre so absurd wie zu sagen: "die Menge *ist grün*" oder "die Menge *ist blind*".

² Da es – nach Ansicht der Extensionalisten – nur eine einzige leere Menge gibt, haben alle Begriffe mit leerer Extension (wie "Kobold", "Pegasus", "Heinzelmännchen") dieselbe extensionale Bedeutung.

³ Dem Extensionalisten zufolge ist eine Menge *aus leeren Mengen* selber leer. Sie enthält nicht etwa die leeren Mengen (Behälter) als solche, sodass man z.B. sagen könnte: die Menge der Fabelwesen enthält die Mengen der Kobolde, Kentauren, Sirenen, etc. Da sich diese "Behälter" bei ihrer Zusammenführung in Nichts auflösen, ist die Fabelwesenmenge selber leer. – Aus dieser Sichtweise lässt sich ein **Paradoxon** konstruieren: da es zumindest eine leere Menge gibt, enthält die *Menge aller leeren Mengen* mindestens ein Element. Da aber die leere Menge selber kein Element enthält, muss auch eine Menge, die aus leeren Mengen gebildet wird, leer sein. Daraus folgt, dass die Menge aller leeren Menge zugleich leer und nicht leer ist.

Die Lehre von den abstrakten Mengen ist also immer auch ein Platonismus, der die eigenständige Existenz von Mengen impliziert. Bloß: wie ist diese *Existenz* vorzustellen? Wo und auf welche Weise existieren Mengen?

(13) Werden Vertreter dieser Lehre mit solchen Fragen konfrontiert, so meiden sie regelmäßig klare Worte (die sie sonst aber fordern!). Entweder erklären sie die Fragen für sinnlos – so z.B. Carnap⁴ – oder sie umgehen das Problem. Ein Beispiel für letzteres liefert Stegmüller. Er schreibt⁵:

"Da Anfänger häufig Schwierigkeiten mit der Existenz der leeren Menge haben, weisen wir darauf hin, dass es sich nach unserer Auffassung dabei um eine Hilfskonstruktion zur Vereinheitlichung der Formulierung mengentheoretischer Gesetzmäßigkeiten handelt und damit um eine ähnliche Maßnahme wie z.B. bei der Definition $a^0 := 1$."

Dazu ist zweierlei zu sagen: erstens ist es nicht fair, die Zweifel an der Existenz von leeren Mengen als "Probleme eines Anfängers" zu bezeichnen. Das ist eine subtile Strategie, Kritik zu entkräften, indem die *Person* des Kritikers deklassiert wird: als Anfänger oder – unverhohlener – als Dummkopf. Mit gleichem Recht könnte der Kritiker seinerseits Stegmüller als *Betriebsblinden* hinstellen. Aber damit erreichen beide Seiten nichts.

Zweitens wirft Stegmüllers Auffassung selber erhebliche Probleme auf. Denn eine *Hilfskonstruktion* – so beschwichtigend das Wort klingt – ist kein Ding, das sich selbst rechtfertigt. Auch sie bedarf der Begründung: warum sie eingeführt werden muss, und ob sie selber sachlich richtig ist? Der bloße Vergleich mit einer anderen, "unverdächtigen" Hilfskonstruktion liefert diese Begründung nicht. Allerdings tritt jetzt die Frage hinzu, ob der Vergleich überhaupt stimmt.

Die Einführung von Hilfskonstruktionen, um eine zweifelhafte Position zu retten, ist eine dubiose Strategie. Damit lässt sich manches philosophische Problem elegant umschiffen:

Nehmen wir an, ein Theist gründet sein Moralsystem auf den Begriff Gottes. Auf die Frage des Kritikers, ob Gott überhaupt existiert, antwortet er: *"Da Anfänger häufig Schwierigkeiten mit der Existenz Gottes haben, weisen wir darauf hin, dass es sich nach unserer Auffassung dabei um eine Hilfskonstruktion zur Vereinheitlichung der Formulierung moralischer Gesetze handelt und damit um eine ähnliche Maßnahme wie z.B. bei der Definition $a^0 := 1$."*

In gleicher Weise könnte ein rationalistischer Philosoph, der einen metaphysischen Determinismus vertritt (z.B. Spinoza), den Begriff der "causa sui" rechtfertigen. Die Frage, ob eine causa sui überhaupt existiert, könnte er abtun mit dem Hinweis: es handelt sich um eine Hilfskonstruktion, die man gelten lassen muss, weil das deterministische System eben eine Erstursache braucht.

(14) Fazit: der mengentheoretische Mengenbegriff, und insbesondere das Konzept der leeren Menge, sind mit schwerwiegenden logischen und sprachphilosophischen Problemen behaftet. Diese Probleme scheinen unlösbar, sodass die Vorstellung einer Menge, die nicht aus Elementen konstituiert wird, sondern von ihnen unabhängig besteht, irrational ist.

⁴ in: "Über abstrakte Wesenheiten", abgedruckt als Anhang zu Carnaps Buch "Bedeutung und Notwendigkeit".

⁵ Stegmüller, Grundlagen der Mengenlehre, in Strukturtypen der Logik (1984), S. 31