Mathematik und Wahrheit

(1) Sind die Sätze der Mathematik *notwendige Wahrheiten*? Die Phrase wird mit großer Regelmäßigkeit und Selbstverständlichkeit vorgetragen – aber ich bin skeptisch. Zwei Gründe sprechen dagegen:

- erstens, dass Formulierungen wie "2 + 2 = 4" gar keine Sätze sind;
- zweitens, dass Formulierungen wie "2 + 2 = 4" keine Träger von Wahrheitswerten sein können, weil sie der Definition der Wahrheit (Übereinstimmung von Fakten und Aussage) nicht genügen.

(2) Beginnen wir mit dem ersten Punkt. – Welcher Logiker würde nicht auflachen, wenn ihm ein Gebilde der Form: "$\forall \vee \exists \rightarrow \exists$" vorgelegt und dazu erklärt wird: dieser Satz ist notwendig wahr! Nein, würde er antworten: dieses Gebilde ist gar kein Satz! Denn ungebundene Quantoren können in wohlgeformten Sätzen nicht auftreten. Damit ein wohlgeformter Satz vorliegt, müssen die Quantoren an Individuenvariable gebunden sein.

Gilt das nicht auch für Zahlen? Schließlich sind auch die Zahlen Quantoren. Oder macht es irgendeinen Unterschied zu sagen:
"*Einige* Schüler sind krank" oder "*Vier* Schüler sind krank" bzw.
"Die Menge enthält *keine* Elemente" oder "Die Menge enthält *null* Elemente"?
Was für Quantoren gilt, muss auch für Zahlen gelten: sie müssen an Individuenvariable gebunden sein, damit sie – in syntaktischer Hinsicht – die normativen Vorgaben einer Satzstruktur erfüllen.

Für sich allein (ohne Individuenbindung) sind die Formelgleichungen der Mathematik rein formale Schemata. Als solche sind sie *richtig* (im Sinne der Beweisbarkeit im Axiomensystem). Formale Richtigkeit ist aber noch nicht Wahrheit, wie sich leicht zeigen lässt. Auch formal richtige Schemata können falsche Sätze liefern, wenn die Quantoren an ungleiche Individuenvariable gebunden werden. Jedes Kind schüttelt den Kopf, wenn man ihm vorgaukelt: "2 Hasen + 2 Hasen = 4 Füchse".

(3) Zum zweiten Punkt: mathematische Formeln werden oft als *analytische Sätze* betrachtet, wobei "analytisch" (= "analytisch wahr") definiert ist als: "allein aus Definitionen und Axiomen eines Systems herleitbar".[1]

Analytisch wahre Sätze (oder Formeln) gelten als wahr, ohne dass eine empirische Überprüfung erforderlich wäre. Der Grund ihrer Wahrheit liegt – so die übliche Ansicht – nicht in faktischen Gegebenheiten, sondern in syntaktischen oder semantischen Sprachregelungen ("wahr aufgrund der Bedeutung der Zeichen"). Daraus ergibt sich, dass analytische Sätze nichts über Fakten aussagen. Egal, wie sich die Fakten verhalten: analytische Sätze sind immer wahr.[2]

[1] z.B. Frege, Grundlagen der Arithmetik, Felix Meiner Verlag Hamburg, 1986, S. 15
[2] eine trendigere Formulierung lautet: "wahr in jeder möglichen Welt"

Bei genauerer Betrachtung liefert diese Auffassung aber einen Widersinn. Denn die Wahrheit besteht darin, dass *ein Satz mit Fakten übereinstimmt* – diese altbewährte Definition[3] liegt in Form der Korrespondenztheorie der Wahrheit den Wissenschaften zugrunde. Wie aber kann ein Satz mit Fakten übereinstimmen, wenn er über Fakten gar nichts aussagt?

Damit ist ein fundamentaler Zweifel an der Wahrheitsfähigkeit analytischer Sätze ausgesprochen. Es ist offenbar ungerechtfertigt, diese Sätze (Formeln) als "wahr" zu bezeichnen.[4]

(4) Im Falle der mathematischen Gleichungen kommt ein Weiteres dazu: ihre (sog.) *Wahrheit* wird durch Methoden bewiesen, die <u>nicht</u> die Übereinstimmung mit Fakten nachweisen. In diese Kerbe schlägt auch, dass die Beweise der Mathematik durch empirische Beobachtungen weder verifiziert von falsifziert werden können.

Daraus folgt, dass die Beweise der Mathematik etwas anderes beweisen – aber nicht Wahrheit im Sinn der *Übereinstimmung mit Fakten*. Wir wollen hierbei den platonistischen Standpunkt, dass die Zahlen in einer geistigen Welt real existieren und die Mathematik die *Übereinstimmung* von Rechenoperationen mit den geistigen Urbildern beweise, als Aberglaube ablehnen.

(5) Jemand könnte einwenden: *Wahrheit* wird nicht allein durch *Übereinstimmung mit Fakten* erwiesen. Denn es gibt Sätze, die aus sich heraus wahr sind (wie: "a ist identisch mit a") und deren Negation einen Widerspruch ergibt. Hier genügt der rein logische Aufweis, dass die Verneinung unmöglich ist, um die Wahrheit des Satzes zu beweisen – und als notwendige obendrein. Und alles, was aus solchen Sätzen (Formeln) korrekt hergeleitet werden kann, ist seinerseits (notwendig) wahr.

Doch auch hier stellt sich die Frage: sind solche Sätze "wahr"? Wird der Ausdruck hier nicht in einem anderen Sinn verwendet als in den empirischen Wissenschaften, wo "wahr" im Sinne der Korrespondenztheorie aufgefasst wird? Sind hier nicht verschiedene Wahrheitsdefinitionen in Gebrauch?

Ich denke schon. Meiner Ansicht nach sind analytische Sätze (oder Formeln) Feststellungen über *sprachliche* Gegebenheiten. Darin liegt ein entscheidender Unterschied zu den empirischen Sätzen, die von *faktischen* Gegebenheiten handeln. Da die Wahrheit in der Übereinstimmung mit Fakten besteht, können nur empirische Sätze einen Wahrheitswert annehmen. Analytische Sätze (Formeln) sind keine Kandidaten für Wahrheitswerte.

Analytische Sätze (Formeln) drücken formale Beziehungen aus, die zwischen Begriffen, Phrasen, Propositionen oder – im Fall der Mathematik – Quantoren bestehen. Ihre Grundlage ist eine bestehende Sprachpraxis. Insofern die Sprache ein transzendentales Medium zur Formulierung von Erkenntnis ist, gehören Aussagen über sie (analytische Sätze, mathematische Gleichungen) in diese – der empirischen Ebene vorausliegende – Ebene. Daher sind sie nicht wahr, sondern (in einem erst zu definierenden Sinn:) *formal richtig.*

[3] Aristoteles, Metaphysik, 1011b
[4] vgl. dazu meinen Essay "Über Analytizität"