Paradoxien des Unendlichen

Teil I

(1) "Paradoxien des Unendlichen" ist der Titel eines Buchs des alt-österreichischen Philosophen und Mathematikers B. Bolzano (1781 – 1848). Indem ich meinen Essay gleich benenne, will ich ihn keineswegs an der Bedeutung dieses Buchs messen, sondern an Bolzanos Intention anknüpfen: zur Klärung des Begriffs des Unendlichen beizutragen.

Ich bin allerdings der Ansicht, dass Bolzano, gegen seine Intention, den Begriff des Unendlichen mehr verdunkelt als erhellt hat. In dieser Hinsicht versteht sich mein Essay auch als eine Gegenposition. Ich werde einige Texte aus Bolzanos Buch zitieren und die Fehler, die sie enthalten, aufdecken. Diese Fehler prägen bis heute die Auffassungen vieler Mathematiker über das Unendliche.

(2) Die Sichtung der Fachliteratur zeigt, dass "unendlich" durchwegs in der Bedeutung einer *sehr großen* oder *sehr kleinen Anzahl* verstanden wird (z.B. als *unermessliche Menge*). Das kommt zum Ausdruck in Formulierungen wie: "eine Linie *besteht aus* unendlich vielen Punkten" oder "die Zahl π *hat* unendlich viele Stellen hinter dem Komma" oder "Hilberts Hotel *besitzt* unendlich viele Zimmer" oder "die Menge der natürlichen Zahlen *enthält* unendlich viele Zahlen".

Verwendet man "unendlich" in dieser Bedeutung, dann treten eine Reihe von Widersprüchen auf. Ein bekanntes Beispiel:

> Die Menge der natürlichen Zahlen (1,2,3,4,...) hat unendlich viele Elemente. Die Menge der *geraden* natürlichen Zahlen (2,4,6,...), die eine Teilmenge daraus ist, hat auch unendlich viele Elemente; und die Teilmenge der *ungeraden* natürlichen Zahlen (1,3,5,...) ebenso. Daraus folgt: die Menge der natürlichen Zahlen hat zugleich *unendlich viele* Elemente und *2 x unendlich viele* Elemente.

Viele Mathematiker nehmen diese Absurdität achselzuckend hin. Sie setzen sogar fest, dass der Ausdruck "unendlich" in widersprüchlicher Bedeutung gebraucht werden darf, indem sie u.a. die folgenden Gleichungen zulassen:

- "unendlich + unendlich = unendlich",
- "unendlich + 1 = unendlich",
- "unendlich x unendlich = unendlich".

(3) Kann man sich mit einer so inkonsistenten Verwendung eines Begriffs abfinden? Ist es nicht Selbstverleugnung, einerseits auf korrekteste Beweisführung bei den Deduktionen zu achten, andererseits die Prinzipien des logischen Denkens über Bord zu werfen, wenn es um das Unendliche geht? Als ob das Unendliche nicht von dieser Welt wäre und sich ihren Gesetzmäßigkeiten nicht beugen müsste!

Aber so viel ist klar: ein Widerspruch ist ein Widerspruch, auch wenn er dem Unendlichen anhaftet. Man muss die Konsequenz klar anerkennen: dass in seiner Konzeption ein Fehler liegt.

(4) Welcher Art ist der Fehler bzw. sind die Fehler? Dies aufzudecken ist ein Ziel des Essays. Ich beginne damit, bekannte Paradoxa des Unendlichen zu analysieren (Teile II bis IV), um dabei einige eigene Überlegungen zu deren Vermeidung zu präsentieren.

Schließlich werde ich eine Definition des Unendlichkeitsbegriffs geben, die keine Paradoxa mehr zulässt (Teil V). Auf der Basis dieser Definition werde ich ein Verfahren vorschlagen, das die Untersuchung der Eigenschaften von "unendlichen" Mengen zulässt. – Die Ergebnisse dieses Verfahrens lösen die Paradoxa des Unendlichen in Nichts auf; mit anderen Worten: sie erlauben zu entscheiden, welche der paradoxen (widersprüchlichen) Behauptungen die richtige ist.

Teil II (Unendliche Linien)

(5) Betrachten wir zuerst ein Beispiel, an dem die konfuse Konzeption des Unendlichkeitsbegriffs gut vor Augen tritt: am Vergleich von *unendlich langen* Strecken. Dabei ergibt sich, dass Strecken, die *unendlich lang* sind, dennoch *unterschiedlich lang* sein können. Bolzano schreibt dazu im §19 seines Buchs:

> Niemand kann etwas Widerstreitendes, ja nur Auffallendes in dem Gedanken finden, dass eine unendliche Menge größer als eine andere [unendliche] sein soll. Wem muss es z.B. nicht einleuchten, dass die Länge der
>
> <- - - -S- - - - - - - - - - b- - - - - - - - - a - - - - - - - - - - - - R - - - - ->
>
> nach der Richtung aR unbegrenzt fortlaufenden Geraden eine unendliche sei? Dass aber die vom Punkt b aus nach derselben Richtung hinlaufende Gerade bR noch um das Stück ba größer denn aR zu nennen sei? Und dass die nach beiden Seiten aR und AS hin unbegrenzt fortlaufende Gerade um eine Größe, die selbst noch unendlich ist, größer zu nennen sei?

(6) Mir leuchtet das nicht ein. Im Gegenteil, ich habe den starken Eindruck, dass hier ein Fehler beim Gebrauch bestimmter Begriffe vorliegt.

Vergegenwärtigen wir uns die Definition von "Linie": sie ist die Verbindung zweier Punkte. In diesem (und genau diesem) Sinn ist auch eine Gerade eine Verbindung zweier Punkte. Die Länge der Geraden ist dann die räumliche Entfernung der beiden Punkte.

Wenn nun eine Gerade eine *Verbindung zweier Punkte* ist: wie kann man dann von einer Geraden reden, wenn einer der Punkte fehlt? Eben dies impliziert der Ausdruck "unendlich lang": dass ein Punkt *nicht* gegeben ist, sondern im Unendlichen (= Nirgendwo) liegt. Somit liegt auch keine Gerade vor; ihre Definition als "Verbindung zweier Punkte" oder "Strecke zwischen zwei Punkten" schließt dies aus.

(7) Man könnte einwenden: es ist aber möglich, sich eine Linie *vorzustellen*, die – von einem Punkt P aus – ins Unendliche fortläuft. Sie läuft auf einen zweiten Punkt zu, ohne diesen je zu erreichen.

Eine solche Vorstellung ist zwar möglich, aber es ist nicht möglich, an der vorgestellten Linie die Länge zu bestimmen. Denn die Länge (= räumliche Entfernung) besteht nur zwischen *gegebenen* Punkten. Indem der zweite Punkt nicht gegeben ist, lässt sich an einer "unendlichen Linie" keine Länge ermitteln.

Fazit: Längenbestimmungen und -vergleiche von unendlichen Geraden sind Luftgespinste – gleich dem Wetzen eines Messers, an dem Griff und Klinge fehlen, mit einem hölzernen Wetzstein.

(8) Nebenbei bemerkt: derselbe Fehler findet sich in Brentanos (1838 – 1917) "Beweis" der Endlichkeit der Welt. Auch dieses Argument bezieht seine argumentative Kraft nur aus dem unklaren Konzept der Unendlichkeit. Brentano argumentiert wie folgt[1]:

> Ein Körper bewege sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf geradliniger Bahn durch das Weltall. Er befinde sich zum Zeitpunkt t am Punkt N. Hätte er sich mit halber Geschwindigkeit bewegt, dann befände er sich zum Zeitpunkt t an einem früheren Punkt M. Da in gleichen Zeiträumen bei halber Geschwindigkeit die halben Strecken zurückgelegt werden, entspricht die Entfernung MN der halben Strecke zwischen N und – der Anfangslosigkeit der Bewegung. D.h.: die Strecke zwischen M und N hätte die halbe Länge einer anfangslosen, unendlichen Linie – ein Widersinn.
>
> ∞ - - - - - - - ------------M-------------N

Das ist tatsächlich ein Widersinn. Aber er gründet nicht in der Annahme der Anfangslosigkeit der Welt, sondern in einer Verwirrung der Begriffe:

Wenn die Strecke MN die *halbe* Entfernung der Gesamtentfernung ist, dann <u>muss</u> die ganze Entfernung 2MN betragen – andernfalls wird der Ausdruck "halbe Entfernung" falsch verwendet. Daraus folgt, dass der Anfangspunkt der Bewegung genau die Streckenlänge MN vom Punkt M in rückwärtiger Richtung entfernt ist (bzw. 2MN vom Punkt N aus). Somit kann von einem "unendlich fernen" Anfangspunkt keine Rede sein, selbst wenn die Distanz zwischen M und N unbekannt ist. Hierin liegt der erste Fehler.

(9) Überdies begeht Brentano jenen Fehler, der oben (an Bolzanos Argument) aufgezeigt wurde: die Annahme, dass der Ausdruck "*unendlich lange*" sinnvoll wäre. Brentano meint: wenn die Welt *unendlich* wäre (also

---

[1] aus: Stegmüller, Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie, Bd.1. Der Originaltext ist in: Brentano, Vom Dasein Gottes, 409, 410.

ohne räumlichen und zeitlichen Anfang), dann würde ein Körper in der gleichen Zeit eine endliche Strecke MN und eine unendliche Strecke ∞M zurückgelegt haben. Das ist klarerweise ein Widersinn. Aber der Widersinn entsteht nicht durch die Annahme der Unendlichkeit der Welt, sondern durch die Annahme, dass eine Strecke, die keinen Anfang hat, eine bestimmbare Länge hätte.

Fazit: man kann die beiden Strecken MN und ∞M nicht miteinander vergleichen (oder sonst wie in Beziehung bringen), weil die Strecke ∞M eine Chimäre ist. Daher ist es auch sinnlos, für das Durchlaufen dieser "Strecke" eine Zeitdauer zu veranschlagen und diese mit einer anderen Zeitdauer zu vergleichen.

(10) Das Ergebnis der bisherigen Untersuchung ist: dass quantifizierende Bestimmungen des Unendlichen – wie: unendlich *lang*, unendlich *fern* – sinnleeres Gerede sind. Jede Messgröße – Länge, Zeitdauer, etc. – wird erst dadurch quantifizierbar, dass die zu messende Eigenschaft fest gegeben ist. Nur dann kann ein Messwert ermittelt werden. Das ist aber bei unendlichen Dingen – Geraden, Zeiträumen, etc. – nicht der Fall: da die zu messende Eigenschaft als unabgeschlossener Prozess vorliegt, lässt sich kein Messwert bestimmen.

Die Länge einer Strecke ist (per definitionem) der Abstand zwischen zwei Punkten. Ist einer der Punkte nicht gegeben, so hat die Strecke keine Länge.

Folgerichtig sind Versuche, "unendliche Längen" miteinander zu vergleichen, Unsinn. Es ist schlicht absurd, die Entfernung zwischen Erde und nirgendwo mit der Entfernung zwischen Mond und nirgendwo zu vergleichen – und zu behaupten, die beiden Entfernungen seien unterschiedlich groß.

Wir können also Paradoxien der *unterschiedlichen Länge* unendlicher Strecken (sei es der Zeit oder des Raums) leicht vermeiden, indem wir uns bemühen, sinnvoll zu reden – wobei damit keine weitergehende Forderung verbunden ist als sich an Definitionen zu halten.[2] Dann lösen sich diese Paradoxien sogleich auf.

Teil III (Unendliche Mengen)

(11) Betrachten wir eine weitere Paradoxie des Unendlichen: die der *unendlichen Mengen*. Unendliche Mengen besitzen – wie Bolzano meint – höchst wunderliche Eigenschaften (§20):

> Ich behaupte nämlich: zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, dass es *einerseits* möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, dass kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu

[2] Was dem Politiker "pacta sunt servanda", ist dem Philosophen "definitiones sunt observandae".

> einem Paare bleibt; und dabei ist es doch *andererseits* möglich, dass die eine diese Mengen die andere als einen bloßen Teil in sich fasst.

(12) Bolzano spricht von dem, was heute "(un)gleiche *Mächtigkeit*" von Mengen heißt. Zwei Mengen X und Y sind gleich mächtig, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen umfassen. Der Beweis der Gleichmächtigkeit erfolgt mit der Methode der "Paarbildung": es wird jedem Element von X genau ein Element von Y zugeordnet. Lassen sich die Elemente einander so zuordnen, dass jedes Element von X genau einen Partner in Y hat und umgekehrt, und in beiden Mengen kein Element ohne Partner bleibt, dann sind X und Y gleich mächtig. Nun meint Bolzano, dass unendliche Mengen sowohl gleich mächtig als auch ungleich mächtig sein können, und bringt dafür folgenden Beweis (§20):

> Nehmen wir zwei beliebige Größen, z.B. 5 und 12: so leuchtet ein, dass die Menge der Größen, welche es zwischen Null und 5 gibt (oder die kleiner als 5 sind), ingleichen auch die Menge der Größen, die kleiner als 12 sind, unendlich sei; und ebenso gewiss ist die letzte Menge größer als die erste zu erklären, da ja diese unwidersprechlich nur ein Teil von jener ist. ... Allein, nicht minder wahr als all Dieses ist auch Nachstehendes: wenn x was immer für eine zwischen Null und 5 gelegenen Größe bezeichnet, und wir bestimmen das Verhältnis zwischen x und y durch die Gleichung:
>
> $$5y = 12x \; ;$$
>
> so ist auch y eine zwischen Null und 12 liegende Größe; und umgekehrt, so oft y zwischen Null und 12 liegt, so liegt x zwischen Null und 5. Auch folgt aus jener Gleichung, dass zu jedem Wert von x nur ein Wert von y, und umgekehrt gehöre. Aus diesem Beiden ist aber klar, dass es zu jedem in der Menge der zwischen Null und 5 liegenden Größen x eine in der Menge der zwischen Null und 12 liegenden Größen y gebe, die sich mit jener zu einem Paare verbinden lässt, mit dem Erfolg, dass nicht ein einziges der Dinge, aus denen diese beiden Mengen bestehen, ohne Verbindung zu einem Paare bleibt und auch kein einziges in zwei oder mehreren Verbindungen auftritt.

(13) Veranschaulichen wir das Argument in kompakterer Ausdrucksweise: Es gibt zwei Mengen X und Y, die jeweils die folgenden Elemente enthalten:

X: $\{x: 0 < x < 5\}$,
Y: $\{y: 0 < y < 12\}$.

Nun ist klar, dass die Menge aller Zahlen, die zwischen Null und 5 liegen, <u>kleiner</u> ist als die Menge aller Zahlen, die zwischen Null und 12 liegen: denn die erstere Menge ist in der letzteren enthalten, und die letztere enthält darüber hinaus noch mehr Zahlen. Somit ist X weniger mächtig als Y.

Andererseits lässt sich beweisen, dass die Mengen X und Y gleich viele Zahlen enthalten, weil die Gleichung "5x = 12y" für jedes beliebige Paar (x;y) genau eine Lösung liefert. Das heißt: zu jeder Zahl der Menge X gibt es genau eine Zahl der Menge Y. Also sind X und Y gleich mächtig.

Somit ergibt sich die Paradoxie, dass X und X *gleich mächtig* und ebenso *ungleich mächtig* sind.

(14) Der Eindruck, dass hier eine Paradoxie vorliegt, wird dadurch begünstigt, dass es uns schwerfällt, unendliche Zahlenmengen vorzustellen und die Operationen, die mit ihren Elementen durchgeführt werden, genau zu verfolgen. Es ist daher zweckmäßig, das unanschauliche Zahlenbeispiel durch ein anschauliches zu ersetzen, das uns – in ungleich leichterer Weise – ermöglicht, den Fehler zu erkennen, der die Paradoxie erzeugt:

> Zwei Kinder A und B bekommen zum Geburtstag jeweils einen Kuchen. Jedoch ist der Kuchen, den A erhält, doppelt so groß wie der, den B erhält. B beklagt sich nun, dass es benachteiligt werde. Die Mutter weist die Klage zurück, indem sie sagt: "Du wirst sehen, dass sich dein Kuchen *genau so oft* teilen lässt wie der von A."
>
> Daraufhin nehmen die Kinder ein Messer und jedes beginnt, seinen Kuchen zu zerteilen: den ganzen in zwei Hälften, die Hälfte in zwei Viertel, das Viertel in zwei Achtel, usf. Und siehe da: weder A noch B kommt bei diesem Teilungsprozess jemals an ein Ende, denn jeder Teil lässt sich wieder teilen. Egal, wie groß der Kuchen ist: er lässt sich in *unendlich viele* Stücke zerteilen.

(15) Bei diesem Beispiel hat man nicht den Eindruck, dass eine Paradoxie vorliege. Zwar besteht auch hier ein gewisser Widerspruch: indem die beiden Kuchen *ungleich groß* sind und sich dennoch *gleich oft* teilen lassen. Aber man erkennt sofort, dass die Ausdrücke "gleich" und "ungleich" sich auf Verschiedenes beziehen. Und das ist der entscheidende Punkt!

Es ist demnach so: der Kuchen hat nicht unendlich viele Teile, sondern er lässt sich *unendlich oft* teilen. "Unendlich" ist nicht eine quantitative Bestimmung der Anzahl der Kuchenteile (bzw. Elemente), sondern die Bestimmung, dass ein operativer Schritt (das Teilen des Kuchens) *beliebig oft* durchgeführt werden kann.

"Unendlich viele" heißt also so: "unbegrenzt fortsetzbar" oder "beliebig oft wiederholbar".

(16) In diesem Sinn hat das Kind <u>nicht</u> einen *unendlichen Kuchen*, sondern es kann den Kuchen *unendlich oft* in kleinere Teile teilen. Als Ergebnis des Teilungsprozesses erhält es <u>nicht</u> eine unendliche Menge an Kuchenstücken, sondern so viele Stücke, wie oft es die Teilung wiederholt. Das Zählen der Stücke ist aber erst möglich, wenn die Teilungen beendet sind. Solange die Teilungen fortfahren, ist die Menge der Kuchenstücke nicht abgeschlossen – und kann hinsichtlich ihrer Größe (Anzahl) nicht bestimmt werden.

Eine *unendliche Menge* – sofern der Ausdruck überhaupt sinnvoll ist – ist demnach eine *unabgeschlossene* Menge, deren Anzahl an Elementen noch nicht feststeht. Es verhält sich hier gleich wie bei der *unendlichen Strecke* bzw. Linie: ohne Anfangs- und Endpunkt ist ihre Länge nicht bestimmbar.

(17) Mit den Ergebnissen dieser Analyse lässt sich die Paradoxie, die uns Bolzano oben (12) vorgaukelt, leicht auflösen. Sie beruht auf dem Irrtum, dass der Ausdruck "*unendliche* Menge" eine quantitative Bestimmung der (Mächtigkeit der) Menge bedeute.

Jedoch ist die Mächtigkeit der Menge (die Anzahl ihrer Elemente) nur bei endlichen Mengen bestimmbar, weshalb auch nur solche Mengen hinsichtlich ihrer Mächtigkeit verglichen werden können.

Unendlich kann eine Menge nur in dem Sinn sein, dass sie unabgeschlossen ist: das heißt, dass ihre Elemente ad libitum vermehrt werden können. Dazu muss ein operativer Schritt – z.B. das Hinzufügen eines neuen Elements oder das Teilen eines vorhandenen – beliebig oft wiederholbar sein.[3] Und bei dieser Art der Unendlichkeit spielt auch keine Rolle, wie groß (wie mächtig) die Ausgangsmenge ist.

(18) Bolzano irrt sich auch in der Einschätzung der Rolle, die die Gleichung: 5y = 12x für sein Argument spielt. Die Gleichung beweist <u>nicht</u>, dass alle Zahlen, die sie lösen, in den beiden Mengen *enthalten* sind. Die Gleichung gibt lediglich die operative Maßnahme an, die mit den Elementen der Mengen *beliebig oft durchgeführt* werden kann (so wie das Teilen des Kuchens mit dem Messer).

Würde man zu einem Zeitpunkt t das Teilen (Dividieren) abbrechen und die Anzahl der (bisher ermittelten) Zahlen zählen, dann ergäbe sich eine ganz bestimmte Anzahl. Das würde zugleich bedeuten, dass die Menge jetzt nicht mehr unendlich (unabgeschlossen) ist, sondern endlich. Erst jetzt kann ihre Mächtigkeit mit der Mächtigkeit einer anderen (ebenfalls endlichen) Menge verglichen werden.

(19) Im Übrigen enthält Bolzanos Argument noch einen weiteren Fehler, den wir bisher stillschweigend hingenommen haben. Angesichts des fundamentalen Fehlers, den wir oben aufzeigten, spielt dieser zwar eine geringere Rolle; dennoch wollen wir kurz darauf eingehen.

Um ihn erkenntlich zu machen, konstruieren wir ein Beispiel, das ihn besser bemerken lässt. Wir nehmen an, dass die Mengen X und Y nur die angegebenen *ganzen* Zahlen enthalten, also:

X: {x: 0,1,2,3,4,5}
Y: {y: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.

Die Aufgabe lautet nun, Paarbildung zwischen den Elementen von X und Y vorzunehmen, wobei kein Element ungepaart bleiben darf. Dies soll mittels

[3] In gleicher Weise löst sich auch die Paradoxie von Hilberts Hotel; vgl. dazu meinen Essay „Antinomien, die keine sind“, wo ich sie behandelt habe.

der Lösungen der Gleichung 5y = 12x geschehen. Das heißt, die Paare werden gebildet, indem jeweils einem x-Wert der mittels der Gleichung ermittelte y-Wert zugeordnet wird.

Die folgende Tabelle zeigt die Paare für den Wertebereich von $5 \geq x \geq 0$:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2,4	4,8	7,2	9,6	12

Es zeigt sich, dass die Lösung y-Werte ergibt, die keine Elemente der Menge Y sind. Denn Y enthält *ganze Zahlen* zwischen 12 und Null, während Zahlen wie 9,6 oder 7,2 rationale Brüche sind.

(20) Die Paarbildung ist demnach nur möglich, indem die Definition der Menge Y (ganze Zahlen) geändert wird. Die Menge Y muss nun auch rationale Brüche mit einer Dezimalstelle enthalten. Lässt man indessen einstellige Dezimalzahlen als Elemente von Y zu, dann werden bei der nächsten Paarung zweistellige erforderlich, bei der übernächsten dreistellige, usw. Mit anderen Worten: es kommt laufend zur Bildung *neuer* (= neu definierter) Mengen. Was also "gepaart" wird, sind nicht mehr die Elemente der ursprünglichen Mengen, sondern die Elemente neu gebildeter Mengen. Die Aufgabe, die Elemente der *ursprünglichen* Mengen X und Y zu paaren, wird aber nicht gelöst.

(21) Dagegen könnte man – mit Blick auf Bolzanos Beispiel – einwenden: dort enthalten die Mengen X und Y von vornherein alle Zahlen, die zwischen Null und 5 resp. 12 denkbar sind, also auch die mit ein, zwei, drei ... und unendlich vielen Dezimalstellen. Da X und Y beide unendliche Mengen sind, brauchen keine neuen Mengen gebildet zu werden.

Dieser Einwand ist kraftlos, denn er setzt voraus, was wir oben als unhaltbar aufgezeigt haben: dass eine Menge *unendlich mächtig* sein kann. Richtig wäre es zu sagen: die Menge kann *beliebig vergrößert werden*, wobei alle erdenklichen Zahlen zu ihren Elementen werden können. Dann aber wäre es auf jeden Fall erforderlich, die Elemente der Ausgangsmenge genau anzugeben.

(22) Überdies: die *Paarbildung* bei dieser Verfahrensweise ist (irgendwie) sonderbar. Sie gibt vor, *Elemente* von Mengen zu paaren – behandelt die Elemente aber wie Zahlwerte, indem sie sie – wenn es die Paarzuordnung erfordert – einfach teilt. Aber das ist unzulässig: man kann Elemente nicht teilen.

Man kann zwar korrekterweise sagen: "Den Bereich zwischen zwei *Zahlen (=Zahlwerten)* können unendlich viele andere Zahlen (=Zahlwerte) einnehmen", aber man kann nicht sagen: "Den Bereich zwischen zwei *Elementen* können unendlich viele andere Elemente einnehmen". Dieser Bereich existiert nicht. Ein Element ist eine diskrete Einheit, kein Kontinuum, und die Reihe der Elemente bildet keine *Zwischenräume*, die man mit eingeschobenen "kleineren" Elementen ausfüllen könnte.

Es liegt also bei dieser Art der Paarbildung eine Konfundierung des *Element*begriffs mit dem *Zahlwert*begriff vor. Das wird wohl dadurch begünstigt, dass das Wort „Zahl“ zweideutig ist: es kann die Zahl *als ein individuelles Ding* und *als Zahlwert* (als dessen quantitative Bedeutung) bezeichnen.

(23) Die gleiche Verwechslung – bzw. Vermischung – von diskreter und kontinuierlicher Einheit spielt auch beim Paradoxon von Punkt und Linie eine Rolle. Man definiert zunächst den Punkt als diskrete Einheit, um ihn dann wie ein Kontinuum zu behandeln. "Die Linie besteht aus (unendlich vielen) Punkten, und jeder Punkt kann wieder in unendlich viele Punkte geteilt werden" – wer so redet, verwischt den Unterschied zwischen diskret und kontinuierlich. Aber das Problem liegt noch tiefer; analysieren wir daher das Punkt-Linien-Paradoxon genauer.

Teil IV (Unendliches erzeugt Endliches)

(24) Das Punkt-Linien-Paradoxon hat eine leicht erkennbare Ursache: die inkonsistente Definition von "Punkt" (und davon abgeleitet: "Linie"). In einer bekannten Formulierung lautet es: "Eine Linie besteht aus unendlich vielen Punkten. – Wie aber kann eine *endliche* Linie aus *unendlich* vielen Punkten bestehen? Und: wie können zwei verschieden lange Linien zugleich aus unendlich vielen Punkten bestehen?"

Das Paradoxon, das hier vorliegt, unterscheidet sich von jenem, das in Teil II behandelt wurde, dadurch, dass dort die Länge *unendlicher* Linien verglichen wurde, während hier *endliche* Linien durch unendliche Punktmengen zustande kommen sollen.

(25) Wie gesagt: es ist die problematische Definition von "Punkt", die den Anschein der Paradoxie erzeugt.

a) Wird "Punkt" definiert als "Objekt ohne Ausdehnung", dann ist implizit festgelegt, dass ein solches Gebilde *keine räumliche* Größe ist[4]. Ausdehnung ist *das* Proprium von Räumlichkeit. Was nicht ausgedehnt ist, gehört nicht zum Bereich des Räumlichen. Folglich kann es keine räumlichen Gebilde – Linien, Flächen, Figuren – erzeugen. Eine Linie besteht dann ebenso wenig aus Punkten wie ein Fahrrad aus Zahlen. Die Paradoxie erweist sich in diesem Fall als lapidare Begriffsverwirrung.

b) Wird "Punkt" definiert als "*unendlich* kleines Objekt", dann ist die Frage: was "unendlich klein" hier bedeutet? Es gibt zwei Möglichkeiten: entweder bedeutet es

- "beliebig oft verkleinerbar" (wie oben (15) dargelegt) oder
- "unermesslich klein".

(26) Man kann davon ausgehen, dass nur die zweite Bedeutung in Frage kommt, um zu erklären, wie aus *unendlich kleinen* Punkten eine *endliche*

[4] Das gilt natürlich auch für den Punkt als zeitliche Größe.

Linie entstehen kann. Doch damit ist die Paradoxie zugleich gelöst. Denn jetzt ist klar, dass "unendlich klein" eine bestimmte (wenn auch sehr kleine) räumliche Ausdehnung meint. Die Linie setzt sich somit aus sehr vielen Punkten (= winzigen Streckenabschnitten) zusammen – aus so unüberschaubar vielen, dass ein dichterisch veranlagter Kopf dies als "*unendlich* viele" bezeichnen mag.

In Wahrheit ist es natürlich eine *begrenzte* Zahl von Punkten, die die endliche Linie erzeugt. Die Paradoxie beruht auf einer Äquivokation von "endlich", welches einmal *räumliche Begrenztheit* meint ("endliche Linie"), das andere Mal *subjektive Unüberschaubarkeit* ("unendlich viele Punkte").

(27) Will man dem Punkt eine Rolle in der Geometrie zugestehen, dann muss man ihm Ausdehnung zuerkennen. Aber nicht eine *unendlich kleine*! Wie oben gezeigt, sind solche Ausdrücke sinnlos.

Zudem ist "klein" eine Bestimmung, die auf dem Vergleich von Messwerten beruht. Zum Beispiel: der Mond ist klein relativ zur Sonne, der Fußball ist klein relativ zum Mond, die Murmel ist klein relativ zum Fußball. Die Bedeutung von "klein" ergibt sich nur durch Vergleich von Messwerten – hier: des Durchmessers der Objekte. Losgelöst von diesem Vergleich wäre z.B. der Mond *zugleich klein* (relativ zur Sonne) *und groß* (relativ zur Murmel) – und schon wieder hätten wir eine Paradoxie!

(28) Mit der Charakterisierung des Punkts als "unendlich klein" hängt das alte Problem zusammen: *gibt es noch kleinere Punkte als unendliche kleine*?

Diese Frage ist allein durch willkürliche Festlegung zu entscheiden, nämlich: ob der Punkt ein *diskretes* oder *kontinuierliches* Gebilde ist. Ist er das kleinste *Diskretum*, dann gibt es per definitionem nichts Kleineres. Ist er ein sehr kleines *Kontinuum*, dann ist natürlich seine endlos fortfahrende Teilung (wenigstens in Gedanken) möglich.

(29) Mir scheint, die Lösung all dieser Probleme wäre die Einführung eines *Standardpunkts*. Ein Standardpunkt ist ein Gebilde mit standardisierter (d.h. international verbindlich festgelegter) Form und Fläche. Zum Beispiel könnte ein Flächenpunkt definiert sein als eine Quadratfläche von $1nm^2$, ein Punkt im Raum als Kubus mit einem Volumen von $1nm^3$.

Solche Größen sind praktikabel: sie sind klein genug, um bei geometrischen Messungen nicht ins Gewicht zufallen, und groß genug, um Aussagen wie: "eine Linie der Länge x besteht aus n Punkten" gehaltvoll zu machen. Zugleich wäre dann Schluss mit den paradoxen Behauptungen, wie: dass zwei unterschiedlich lange Linien jeweils unendlich viele Punkte beinhalten, oder dass eine Linie eine Länge ohne Breite ist.

Es wäre auch zulässig, von *kleineren* Einheiten als dem Standardpunkt zu sprechen, etwa von einem halben oder zehntel Standardpunkt – dies könnte im subatomaren Bereich sinnvoll sein. Dass aber ein Punkt in unendlich viele weitere *Punkte* unterteilt werden könne, das wäre falsch: indem man ihn teilt, erhält man keine *Punkte*, sondern Halbpunkte, Viertelpunkte, Zehntelpunkte, usw. (so wie auch das *Meter* in Zentimeter, Millimeter, usw. unterteil wird).

(30) Ich möchte die Diskussion der Frage, ob Punkte diskrete oder teilbare Entitäten sind, nicht beenden, ohne einen Text Bolzanos zu zitieren. Der Text demonstriert das Dilemma, das ersteht, wenn man einerseits erklärt, dass Endliches in unendlich Kleines teilbar ist, andererseits aber nicht konzedieren will, dass unendlich Kleines zu endlichen Größen addiert werden kann. Die Lösung des Dilemmas bei Bolzano ist einzigartig: es ist selten, dass ein so schreiender Widerspruch so unverblümt behauptet wird (man vergleiche den ersten und den letzten Satz des Zitats; §38):

> Dass je zwei Zeitpunkte noch durch eine unendliche Menge dazwischenliegender Zeitpunkte getrennt sind; dass es ebenso zwischen je zwei Punkten im Raum eine unendliche Menge dazwischenliegender gibt; ja dass es selbst im Reich der Wirklichkeit zwischen je zwei Substanzen noch eine unendliche Menge anderer gebe – ist allerdings zuzugestehen; aber was folgt hieraus das einen Widerspruch enthielte? Nur so viel folgt, dass durch zwei Punkte allein, ja auch durch drei, vier und jede bloß endliche Menge derselben noch kein Ausgedehntes erzeugt wird. Dies alles gestehen wir selbst, ja wir gestehen, dass auch eine unendliche Menge von Punkten nicht immer zur Erzeugung eines Continuums, z.B. einer auch noch so kurzen Linie, hinreicht, wenn diese Punkte nicht zugleich die gehörige Anordnung haben. ... so können wir nicht umhin zu erklären, dort, aber auch nur dort sei ein Continuum vorhanden, wo sich ein Inbegriff von einfachen Gegenständen (von Punkten in der Zeit oder im Raum...) befindet, die so gelegen sind, dass jeder einzelne derselben für jede auch noch so kleine Entfernung wenigstens einen Nachbarn in diesem Inbegriff habe.

Teil V

(31) Ein interessantes Paradoxon ist das folgende, das Bolzano im §33 seines Buchs beschreibt. Interessant ist es deshalb, weil es einen Hinweis auf eine sinnvolle Interpretation des Ausdrucks "unendlich", angewendet auf Mengen, liefert:

Man betrachte die Mengen A und B, wobei A die Menge der natürlichen Zahlen ist (1, 2, 3, usw.) und B die Menge ihrer Quadrate (1^2, 2^2, 3^2, usw.)

A: {1, 2, 3, 4, 5, 6, usw.};
B: {1, 4, 9, 16, 25, 36, usw.}.

Der Vergleich der beiden Mengen zeigt dreierlei:

- erstens, dass B eine Teilmenge von A ist,
- zweitens, dass A und B gleich viele Elemente besitzen (müssen), da jedes Glied von B als Quadrat einer Zahl von A gebildet wird;
- drittens, dass die Summe aller Zahlen von B größer sein muss als die Summe der Zahlen von A, weil – mit Ausnahme des ersten Elements –

jedes Element von B einen größeren Zahlenwert besitzt als das jeweilige von A.

Das Paradoxon ist hier ein doppeltes: einerseits, dass A und B gleich viele Elemente enthalten, obwohl B – deutlich sichtbar – zahlreiche Elemente von A nicht enthält (ohne im Gegenzug ein Element zu besitzen, das nicht auch A enthielte); und andererseits, dass die Summe der Zahlen von B größer ist als die von A, obwohl A alle Zahlen von B enthält und darüber hinaus noch weitere. Hiermit wäre der Lehrsatz, dass der Teil nicht größer sein kann als das Ganze, offen widerlegt.

(32) Wir wissen inzwischen, dass das Paradoxon ein bloß vermeintliches ist, weil, statt mit Begriffen gedacht, mit Worten geklingelt wird. Von unendlich vielen Elementen lässt sich weder eine Anzahl noch eine Summe bestimmen, die mit der Anzahl bzw. Summe der Elemente einer anderen Menge verglichen werden könnte. Aussagen dieser Art sind sinnlos.

Trotzdem wäre ein Vergleich der Mengen A und B hinsichtlich gewisser Eigenschaften interessant. Vor allem die Fragen, die das Paradoxon vorlegt, fordern heraus: ist die Zahlensumme von B wirklich größer als die von A, obwohl B nur eine Teilmenge von A ist, und A wesentlich mehr Elemente als B enthält?

(33) Um die Fragen zu beantworten, müssen A und B (hinsichtlich dieser Eigenschaften) vergleichbar sein. Angesichts unendlicher Mengen heißt das: es muss erst etwas Vergleichbares geschaffen werden. Zu diesem Zweck schlage ich vor, solchen Problemen eine *empirische Formulierung* zu geben und sie mit den Verfahren der empirischen Wissenschaften zu untersuchen (auch wenn diese Vorgangsweise den Mathematikern unvertraut, vielleicht sogar unzulässig für ihren Fachbereich erscheint).

Das empirische "Beweisverfahren" sieht vor, dass Hypothesen gebildet und überprüft werden, wobei die Überprüfung – sofern nicht alle Fälle der Population (Gesamtmenge) verfügbar sind – an Stichproben durchgeführt wird, die aus ihr entnommen werden.

(34) Betrachten wir nochmals die beiden Mengen A und B:

A: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, usw.};
B: {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, usw.}.

Da ihre Elemente eine nie endende Reihe bilden, sind A und B unendliche (unabgeschlossene) Mengen. In Anlehnung an Bolzano stellen wir – hinsichtlich ihrer Eigenschaften – drei Hypothesen auf:

<u>Hypothese 1</u>: A und B enthalten gleich viele Elemente;
<u>Hypothese 2</u>: B ist eine Teilmenge von A (d.h. alle Elemente von B sind auch in A enthalten);
<u>Hypothese 3</u>: die Summe der Zahlwerte der Elemente von B ist größer als die Summe der Zahlwerte der Elemente von A.

(35) Um die Hypothesen überprüfen zu können, muss zuvor der Begriff der "unendlichen Menge" präzisiert werden. Das ist im Prinzip schon oben (im Teil III) geschehen. Wir brauchen die Präzisierung daher hier nur mehr zu rekapitulieren:

Zunächst sei nochmals betont, dass der Ausdruck "unendliche Menge" sinnlos ist, wenn man ihn als "Menge *mit unendlich vielen* Elementen" auffasst. Denn: eine solche Menge hat keine bestimmbare Anzahl von Elementen, weshalb quantitative Vergleiche mit anderen Mengen oder mit eigenen Teilmengen undurchführbar sind.

(36) Eine unendliche Menge kann es nur in der Weise geben, dass die Elemente der Menge *beliebig* (unbegrenzt, endlos) vermehrt werden können. Unendliche Mengen sind demnach virtuelle Gebilde, die
a) durch eine Ausgangsmenge (bzw. zumindest ein Startelement) und
b) durch Erzeugungsregeln
festgelegt sind, wobei die Erzeugungsregeln eine ad-infinitum Generierung neuer Elemente ermöglichen.

Die Regeln schreiben die konkrete Operation vor, die mit einem gegebenen Element durchgeführt wird und die nach jeder Durchführung mit dem neuem Element wiederum durchgeführt wird. So wird die Menge der natürlichen Zahlen gebildet, indem, beginnend mit dem Startelement 1, der Zahlenwert 1 addiert wird, und diese Addition an jedem neuen Element wiederholt wird. Da bei jedem Schritt ein neues Element entsteht, lässt sich der Erzeugungsprozess ad infinitum fortführen.

Der Bezug auf diesen Erzeugungsprozess liefert die einzig sinnvolle Definition von "unendlicher Menge": als einer Menge, die nie abgeschlossen ist, weil unbegrenzt neue Elemente generiert werden können.[5] – In dieser Definition wird der Ausdruck im Weiteren verwendet.

(37) Ist die Menge nicht abschließbar, dann besitzt sie auch keine endgültige Gestalt. Somit ist es unmöglich, sie als Ganze bzw. Endgültige zu betrachten, zu untersuchen, zu vergleichen bzw. die Eigenschaften, die ihr zu- oder abgesprochen werden, an ihr nachzuweisen.

Der einzige Weg, eine unendliche Menge dennoch zu untersuchen, besteht darin, aus ihr Stichproben zu ziehen. Zu diesem Zweck wird der Erzeugungsprozess an definierter Stelle abgebrochen und die bis dahin gebildete Teilmenge als Repräsentant der unendlichen Menge betrachtet.

An welcher Stelle der Abbruch erfolgt, ist eine Sache pragmatischer Gesichtspunkte: die Stichprobe soll hinsichtlich bestimmter Eigenschaften analysierbar sein. Es muss also gewährleistet sein, dass diese Eigenschaften ausreichend deutlich in ihr ausgebildet sind. Zugleich darf sie nicht zu viele Elemente enthalten, denn das könnte die Analyse erschweren.

(38) Die Abbruchstelle wird als Punctum interruptionis (pir) festgelegt: d.h. als dasjenige Element, das als letztes der Menge hinzugezählt wird.

---

[5] Dieses "nicht abgeschlossen" ist eine *logische* Bestimmung, keine zeitliche oder räumliche – wiewohl der endlose Generierungsprozess auch zeitlich oder räumlich nie an ein Ende käme.

Erfolgt die Erzeugung der Menge durch repetitive Anwendung einer Erzeugungsregel ausgehend von einem Startelement, dann bedeutet pir = 50, dass der Erzeugungsprozess nach Generierung nach 50 Elementen beendet wird. Wird die Menge indessen durch Ziehung einer Zufallsstichprobe aus bereits erzeugten Elementen gebildet, dann bedeutet pir = 50, dass genau 50 Elemente daraus gezogen werden.

(39) Stichproben aus unendlichen Mengen bilden empirische Repräsentationen von unendlichen Mengen. Dadurch können die Eigenschaften unendlicher Mengen bzw. ihrer Elemente empirisch untersucht werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Eigenschaften unendlicher Mengen in ihren Stichproben in gleicher Weise auftreten wie in der unendlichen Menge selbst.

Ob diese Voraussetzung zutrifft, muss im Zweifelsfall überprüft werden. Dazu zieht man mehrere Stichproben unterschiedlicher Größe (z.B. 3 Stichproben X, Y und Z mit pir(X) = 10, pir(Y) = 20 und pir(Z) = 50) und vergleicht, ob die Ausprägung des untersuchten Merkmals konstant ist. Neben der *Konstanz* wäre auch ein *Trend* (z.B. auf einen bestimmten Zahlenwert hin) ein Hinweis auf die Art der Merkmalsausprägung in der unendlichen Menge.

(40) Veranschaulichen wir das Gesagte an einem Beispiel: an der Prüfung der drei Hypothesen aus (34). Die beiden unendlichen Mengen, die zu vergleichen sind, sind A (die natürlichen Zahlen) und B (deren Quadrate):

A: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, usw.}
B: {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, usw.}.

Die erste Hypothese lautet, dass A und B gleich viele Elemente enthalten. Die Hypothese ist leicht zu verifizieren: bricht man den Generierungsprozess bei z.B. pir = 1000 ab, so enthält jede Stichprobe 1000 Elemente. Der Abbruch lässt sich an beliebiger Stelle wiederholen: stets ist die Anzahl der Elemente in beiden Stichproben gleich. Man kann daraus schließen, dass A und B tatsächlich gleich viele Elemente enthalten.

Die zweite Hypothese lautet, dass B eine Teilmenge von A ist, d.h. dass alle Elemente von B auch in A enthalten sind. Diese Hypothese lässt sich empirisch *falsifizieren*: bricht man den Generierungsprozess bei pir = 10 ab, so findet man, dass nur 3 Elemente von Stichprobe B in Stichprobe A enthalten sind (nämlich 1, 4 und 9), während Stichprobe B weitere 7 Elemente enthält, die Stichprobe A nicht enthält. Ein analoges Ergebnis findet sich bei pir = 100: hier sind nur die ersten 10 Elemente von Stichprobe B auch Elemente von Stichprobe A. Bei pir = 1000 sind nur 31 Elemente von Stichprobe A in Stichprobe B enthalten. Weitere Stichprobenanalysen erbringen stets das gleiche Ergebnis. Also ist B keine Teilmenge von A.

Die dritte Hypothese lautet, dass die Summe der Zahlenwerte von B größer ist als die Summe der Zahlenwerte von A. Diese Hypothese wird empirisch wieder verifiziert, wie man anhand einiger Stichprobenanalysen sehen kann. Die folgende Tabelle zeigt, dass sich die Zahlensummen von A und B bei beliebigem pir so verhalten, dass die Summe der Elemente von B stets größer ist als die von A[6]:

pir	Summe aller {A}	Summe aller {B}
5	15	55
10	55	385
20	210	2870
100	5050	338350

Das Verfahren der empirischen Analyse unendlicher Mengen mithilfe von Stichproben erlaubt somit eine Entscheidung, welche der drei Hypothesen aus (34) richtig ist. Von den widerstreitenden Behauptungen wird jeweils eine als falsch erwiesen. Es ist falsch, dass A und B nicht gleich mächtig sind; es ist falsch, dass B eine Teilmenge von A ist; und es ist falsch, dass die Summe der Elemente von A größer ist als die von B.

(41) Auch das Paradoxon, das in (2) erörtert wurde, lässt sich mit dieser Methode lösen. Betrachten wir dazu die drei Mengen N (natürliche Zahlen), N_g (gerade natürliche Zahlen) und N_u (ungerade natürliche Zahlen):

N: {1, 2, 3, 4, 5, usw.},
N_g: {2, 4, 6, 8, 10, usw.},
N_u: {1, 3, 5, 7, 9, usw.}.

Die erste Frage lautet: besitzen N, N_g und N_u jeweils gleich viele Elemente? Die Frage lässt sich durch Stichprobenanalysen eindeutig bejahen. Abbruch des Erzeugungsprozesses bei beliebigem pir liefert in allen drei Stichproben jeweils gleich viele Elemente.

Die zweite Frage lautet: ist N_g eine Teilmenge von N? Dies ist offenbar nicht der Fall, wie die Stichprobenanalyse zeigt. Nehmen wir z.B. als Abbruchstelle pir = 10; dann erhalten wir:

N/(pir = 10): {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
N_g/(pir = 10): {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}.

Die Stichprobe von N_g enthält 5 Elemente, die nicht Elemente der Stichprobe von N sind. Ein analoges Ergebnis erhält man bei beliebiger Abbruchstelle. N_g ist also keine Teilmenge von N. – Gleiches gilt für N_u , wie man sich leicht selber überzeugen kann.

Damit wird das (scheinbare) Paradoxon aufgelöst: zwar stimmt, dass die drei Mengen (N, N_g und N_u jeweils gleich mächtig sind, doch sind die beiden letzteren keine Teilmengen von N. Die Eigenschaft der Gleichmächtigkeit der drei Mengen bedingt nämlich, dass sie nicht die gleichen Elemente enthalten. Bildhaft vorgestellt, läuft der Generierungsprozess von N_g und von N_u dem Generierungsprozess von N stets voraus, sodass an jeder beliebigen Abbruchstelle (pir) N_g und N_u bereits Elemente enthalten, die N

[6] Die Summenbildung besteht in der Addierung mindestens zweier Elemente. Der Vergleich der Summen bei pir = 1 ist daher nicht möglich.

noch nicht enthält. Dieser "Vorsprung" von N_g und von N_u wird von N in alle Unendlichkeit nicht eingeholt.

(42) Das Verfahren der empirischen Analyse unendlicher Mengen lässt also deren Eigenschaften klarer erkennen als ihre rein theoretische Betrachtung. Dazu verhilft im Weiteren – was bisher vernachlässigt wurde – eine sprachanalytische Klärung des Begriffs der Unendlichkeit. Wie wir dabei gefunden haben, kann "unendlich" nicht von Quantifizierungen ausgesagt werden, wie etwa "unendlich viele" oder "unendlich klein" oder "unendlich lang". Solche Ausdrücke besitzen keinen Sinn, da Quantifizierungen nur möglich sind, wenn eine Messgröße (Länge, Anzahl,...) in endlicher Ausprägung gegeben ist. Messen besteht darin, eine vorhandene Ausprägung einer Messgröße in Relation zu einer Grundeinheit (Maßeinheit) zu setzen und zu bestimmen, wie oft die Grundeinheit darin enthalten ist. Eben dies lässt sich bei Mengen, deren Elemente eine nie endende Serie bilden, nicht vornehmen.

(43) Eine sehr richtige Darstellung des Konzepts des Unendlichen, einschließlich der Kritik an einer irrigen Interpretation, findet sich übrigens bei Kant[7]. Ich beende meinen Essay, indem ich diese instruktive Textpassage ausführlich wiedergebe. Ich erlaube mir, darin einige Worte, die ich für besonders bedeutsam halte, kursiv herauszuheben.

> Ich hätte die Thesis [dass die Welt einen Anfang in der Zeit und im Raum hat] auch dadurch dem Scheine nach beweisen können, dass ich von der Unendlichkeit einer gegebenen Größe, nach der Gewohnheit der Dogmatiker, einen fehlerhaften Begriff vorangeschickt hätte. [Nämlich:] Unendlich ist eine Größe, über die keine größere (d.i. über die darin enthaltene *Menge* einer Einheit) möglich ist. Nun ist keine Menge die größte, weil immer noch ein oder mehrere Einheiten hinzugetan werden können. Also ist eine unendliche gegebene Größe, mithin auch eine (der verflossenen Reihe sowohl als der Ausdehnung nach) unendliche Welt unmöglich: sie ist also beiderseitig begrenzt. – So hätte ich meinen Beweis führen können: allein dieser Begriff stimmt nicht mit den, was man unter einem unendlichen Ganzen versteht [, überein]. Es wird dadurch *nicht vorgestellt, wie groß es sei*, mithin *ist sein Begriff auch nicht der Begriff eines Maximums*, sondern es wird dadurch nur sein *Verhältnis* zu einer als beliebig anzunehmenden Einheit, in Ansehung deren dasselbe größer ist als die [=deren] Zahl, gedacht. ... Der wahre Begriff der Unendlichkeit ist: dass die sukzessive Synthesis [= Erzeugung] der Einheit in Durchmessung eines Quantums niemals vollendet sein kann.

[7] Kritik der reinen Vernunft, Transzendentale Dialektik: Anmerkung zur ersten Antinomie (B 458, 460)