

Paradoxien des Unendlichen

© Viktor Weichbold (2010)

Teil I

(1) "Paradoxien des Unendlichen" ist ein bedeutendes Werk des alt-österreichischen Philosophen und Mathematikers B. Bolzano (1781 – 1848). Indem ich den vorliegenden Essay so benenne, will ich ihn keineswegs an der Bedeutung dieses Werks messen, sondern an Bolzanos Intention anknüpfen: zur Klärung des Begriffs des Unendlichen beizutragen.

Ich bin allerdings der Ansicht, dass Bolzano, gegen seine Intention, den Begriff des Unendlichen mehr verdunkelt als erhellt hat. In dieser Hinsicht versteht sich mein Essay auch als eine (teilweise) Gegenposition. Ich werde einige Texte aus Bolzanos Buch zitieren und die Fehler, die sie enthalten, aufdecken. Diese Fehler prägen bis heute die Auffassungen der Mathematiker über das Unendliche.

(2) Die Sichtung der Fachliteratur zeigt, dass "unendlich" fast immer in der Bedeutung einer *sehr großen oder kleinen Zahl* (eines Grenzwerts) bzw. einer *riesigen Menge* verstanden wird. Das kommt zum Ausdruck in Formulierungen wie: "eine Linie *besteht aus* unendlich vielen Punkten" oder "die Zahl π *hat* unendlich viele Stellen hinter dem Komma" oder "Hilberts Hotel *besitzt* unendlich viele Zimmer" oder "die Menge der natürlichen Zahlen *ist* unendlich groß".

Verwendet man "unendlich" in dieser Bedeutung, dann treten eine Reihe von Widersprüchen auf. Ein bekanntes Beispiel:

Die Menge der natürlichen Zahlen (1,2,3,4,...) hat unendlich viele Elemente. Die Menge der *geraden* natürlichen Zahlen (2,4,6,...), die eine Teilmenge daraus ist, hat auch unendlich viele Elemente; und die Teilmenge der *ungeraden* natürlichen Zahlen (1,3,5,...) ebenso. Daraus folgt: die Menge der natürlichen Zahlen hat sowohl unendlich viele Elemente als auch 2 x unendlich viele Elemente (als Summe der beiden Teilmengen, denn Teilmengen verhalten sich additiv).

Die Mathematiker stecken vor diesem Widerspruch, wie der Vogel Strauß, den Kopf in den Sand. Sie setzen nämlich fest: "unendlich + unendlich = unendlich" und betrachten den Widerspruch als aufgehoben. Das Problem ist damit aber nur verschoben: denn jetzt ist Begriff des Unendlichen so verworren, dass er die heterogensten Behauptungen zulässt, wie z.B.:
"unendlich + unendlich = unendlich",
"unendlich + 1 = unendlich",
"unendlich x unendlich = unendlich".

(3) Ein Logiker (und wohl auch ein ernsthafter Mathematiker) kann sich mit einer so inkonsistenten Verwendung eines Begriffs nicht abfinden. Es wäre Selbstverleugnung, einerseits auf korrekteste Beweisführung bei den

Deduktionen zu achten, andererseits aber die Prinzipien des richtigen Denkens angesichts des Unendlichen über Bord zu werfen – als ob es nicht von dieser Welt wäre und sich ihren Gesetzmäßigkeiten nicht beugen müsste. Ein Widerspruch ist ein Widerspruch, auch wenn er dem Unendlichen anhaftet. Man muss die Konsequenz daraus klar anerkennen: dass in seiner Konzeption ein Fehler vorliegt, der den Widerspruch erzeugt.

(4) Welcher Art ist der Fehler bzw. sind die Fehler? Dies aufzudecken ist ein Ziel des Essays. Ich beginne damit, einige bekannte Paradoxa des Unendlichen zu analysieren (Teile II bis IV), um zugleich einige eigene Überlegungen zu deren Vermeidung zu präsentieren.

Meine weitere Absicht ist es, eine Definition des Unendlichkeitsbegriffs zu geben, die keine Paradoxa mehr zulässt (Teil V). Auf der Basis dieser Definition werde ich ein Verfahren vorschlagen, das die Untersuchung der Eigenschaften von unendlichen Mengen zulässt. – Die Ergebnisse dieses Verfahren erbringen eine Auflösung der (sogenannten) Paradoxa des Unendlichen; mit anderen Worten: eine klare Entscheidung, welche der paradoxen (widersprüchlichen) Behauptungen die richtige ist.

Teil II

(5) Betrachten wir zuerst ein Beispiel, an dem sich die konfuse Konzeption des Unendlichkeitsbegriffs deutlich zeigt: beim Vergleich unendlicher Mengen. Dabei findet man, dass zwei Mengen, die beide unendlich sind, unterschiedlich viele Elemente enthalten können. Bolzano schreibt dazu im §19 seines Buchs:

Niemand kann etwas Widerstreitendes, ja nur Auffallendes in dem Gedanken finden, dass eine unendliche Menge größer als eine andere [unendliche] sein soll. Wem muss es z.B. nicht einleuchten, dass die Länge der

<- - - -S- - - - - b- - - - - a - - - - - R - - - - ->

nach der Richtung aR unbegrenzt fortlaufenden Geraden eine unendliche sei? Dass aber die vom Punkt b aus nach derselben Richtung hinlaufende Gerade bR noch um das Stück ba größer denn aR zu nennen sei? Und dass die nach beiden Seiten aR und AS hin unbegrenzt fortlaufende Gerade um eine Größe, die selbst noch unendlich ist, größer zu nennen sei?

(6) Mir leuchtet es nicht ein. Im Gegenteil, ich finde, dass das Argument auf einer Blendung beruht, indem es den Begriff der Geraden falsch verwendet, und uns dadurch an der Nase herumführt.

Vergegenwärtigen wir uns die Definition von "Linie": sie ist die Verbindung zweier Punkte. In diesem (und genau diesem) Sinn ist auch die obige Gerade die Verbindung zweier Punkte. Aus der Definition ergibt sich, dass sich die Gerade *zwischen* zwei Punkten erstreckt, und dass ihre Länge mit der räumlichen Entfernung der beiden Punkte identisch ist.

Nun impliziert der Ausdruck "unendlich", dass ein solcher Punkt *nirgends* vorliegt. Dies ist aber eine notwendige Bedingung, um sinnvoll (definitionsgemäß) von einer Linie reden zu können: dass zwei Punkte gegeben sind. Diese Bedingung wird hier nicht erfüllt. Die Definition einer Linie schließt also aus, dass sie zwischen einem gegebenen Punkt R und dem Unendlichen (welches die Verneinung eines fixen Punktes ist) verläuft.

(7) Ein Vergleich der Länge zweier Linien (Gerader, Strecken) ist nur möglich, wenn tatsächlich zwei Linien gegeben sind. *Unendliche Gerade* sind aber Chimären, die nicht einmal als gedachte existieren können, weil sie der Definition der Linie nicht entsprechen. Daher ist ihr Vergleich gar nicht möglich. Ich müsste – um die Länge der Linien im obigen Beispiel zu bestimmen – an einem Punkt in der Richtung R ihr Ende festsetzen; doch gerade dies wäre im Widerspruch zum Attribut "unendlich", das ich der Linie beifügen möchte. Es gibt folglich nur endliche Linien oder – keine Linie. Eine "unendliche Linie" ist eine *Contradictio in adjecto*, die aus der Missachtung der Definition von "Linie" erwächst.

(8) Nebenbei bemerkt: derselbe Fehler findet sich in Brentanos (1838 – 1917) "Beweis" der Endlichkeit der Welt. Auch dieses Argument bezieht eine nicht geringe Blendwirkung aus dem unklaren Konzept der Unendlichkeit. Brentano argumentiert wie folgt¹:

Ein Körper bewege sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf geradliniger Bahn durch das Weltall. Er befinde sich zum Zeitpunkt t am Punkt N. Hätte er sich mit halber Geschwindigkeit bewegt, dann befände er sich zum Zeitpunkt t an einem früheren Punkt M. Da in gleichen Zeiträumen bei halber Geschwindigkeit die halben Strecken zurückgelegt werden, entspricht die Entfernung MN der halben Strecke zwischen N und – der Anfangslosigkeit der Bewegung. D.h.: die Strecke zwischen M und N hätte die halbe Länge einer anfangslosen, unendlichen Linie – ein Widersinn.

∞ - - - - - M-----N

Die Pointe des Arguments besteht darin, dass der Körper in derselben Zeit das eine Mal eine endliche Strecke, das andere Mal eine unendliche Strecke durchfliegt. Das ist klarerweise unmöglich. Brentano meint nun, dieser Widerspruch zeige die Falschheit der Prämisse einer (räumlich und zeitlich) unendlichen Welt an, während er – in Wahrheit – mehrere Begriffskonfusionen anzeigt.

Wenn die Strecke MN die *halbe* Entfernung der Gesamtentfernung ist, dann muss die Gesamtentfernung 2MN betragen – andernfalls wird der Ausdruck "halbe Entfernung" falsch verwendet. Daraus folgt, dass der Anfangspunkt der Bewegung genau die Streckenlänge MN vom Punkt M bzw. die Streckenlänge 2MN vom Punkt N entfernt liegt. Somit kann von einem "unendlich fernen" Anfangspunkt keine Rede sein, selbst wenn die Distanz zwischen M und N unbekannt ist. – Brentanos Beispiel geht von der falschen Annahme aus, dass in gleicher Zeit und mit gleicher Geschwindigkeit *verschiedene* Strecken zurückgelegt

¹ aus: Stegmüller, Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie, Bd.1. Der Originaltext ist in: Brentano, Vom Dasein Gottes, 409, 410.

werden könnten. Es ist DIESER Irrtum, der den obigen Widerspruch erzeugt – nicht die Annahme einer räumlich oder zeitlich unbegrenzten Welt.

Brentano setzt – wie leicht zu sehen ist – die *Anfangslosigkeit* einer Bewegung gleich mit dem Durchlaufen einer *unendlich langen* Linie. Nun impliziert *Anfangslosigkeit* aber, dass es *keinen* Raum- oder Zeitpunkt gibt, von dem aus die Länge des zurückgelegten Wegs bzw. die dafür benötigte Zeitdauer gemessen werden könnte. Es ist daher gar nicht möglich, die zwei Punkte M und N derart in Beziehung zu setzen, dass man sagt: N ist doppelt so weit vom "im Unendlichen liegenden" Ursprung der Bewegung entfernt wie M. Diese Aussage ist sinnlos, weil inhaltlich unbestimmbar.

(9) Verallgemeinern wir das Ergebnis der bisherigen Untersuchung, dann besagt es: dass quantifizierende Aussagen von unendlichen Dingen sinnlos sind. Jede Messgröße – Anzahl, Länge, Zeitdauer, etc. – wird erst dadurch bestimmbar, dass die zu messende Eigenschaft klar gegeben ist. Dann – und nur dann – kann ein Messwert ermittelt werden. Dies ist aber bei unendlichen Dingen – Mengen, Geraden, Zeiträumen, etc. – nicht der Fall: da die zu messende Eigenschaft als unabgeschlossener Prozess vorliegt, lässt sich ein (endgültiger) Messwert nicht bestimmen.

Die Länge einer Strecke ist (per definitionem) der Abstand zwischen zwei Punkten. Ist einer der Punkte nicht gegeben, so gibt es keine Linie – und worauf soll sich dann eine behauptete Länge beziehen? Eine unendlich lange Gerade ist wie ein Messer ohne Griff, an dem die Klinge fehlt. Und das Vergleichen der Längen zweier unendlicher Gerader ist wie das Wetzen eines solchen Messers mit einem hölzernen Wetzstein.

Es wäre ja auch ein offenkundiger Schwachsinn, die Entfernung zwischen der Erde und nirgendwo mit der Entfernung zwischen dem Mond und nirgendwo zu vergleichen, und zu behaupten, die beiden Entfernungen seien gleich groß und zugleich nicht gleich groß. Solches Gerede kann nur in der Belletristik oder der Science-Fiction-Literatur gut ankommen.

Das Gleiche gilt für die Größe von Mengen. Die Anzahl der Elemente lässt sich nur bestimmen, indem man von einem Anfangselement bis zu einem Endelement durchzählt. Endloses Zählen liefert kein Ergebnis, weshalb ein Vergleich von "unendlichen" Mengen gar nicht möglich ist: was würde womit verglichen? Erst wenn ein Element definiert ist, welches das erste, und ein anderes, welches das letzte in der Reihe ist, wird das Abzählen möglich und liefert ein Ergebnis. Damit aber ist die Menge eine endliche, und ihre Charakterisierung als "unendliche" ist hinfällig.

Wir können also Paradoxien von der Art des widersprüchlichen Größenvergleichs vermeiden, indem wir uns verpflichten, sinnvoll zu reden – wobei wir damit keine weitergehende Forderung verbinden als dass wir uns an Definitionen halten.² Dann lösen sich einige Paradoxien des Unendlichen als bloße Sprachverwirrungen auf.

² Was dem Politiker "pacta sunt servanda", ist dem Philosophen "definitiones sunt observandae".

Teil III

(10) Betrachten wir eine weitere Paradoxie des Unendlichen: die der Paarbildung. Bolzano beschreibt sie folgenderweise (§20):

Ich behaupte nämlich: zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, dass es *einerseits* möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, dass kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt; und dabei ist es doch *andererseits* möglich, dass die eine diese Mengen die andere als einen bloßen Teil in sich fasst.

Bolzano spricht von dem, was heute "gleiche Mächtigkeit" von Mengen heißt: lassen sich die Elemente zweier Mengen A und B einander so zuordnen, dass jedes Element von A genau einen Partner in B hat und umgekehrt, und in beiden Mengen kein Element ohne Partner bleibt, dann sind A und B gleich mächtig (d.h. sie enthalten gleich viele Elemente). Nun meint Bolzano, dass unendliche Mengen sowohl gleich mächtig als auch ungleich mächtig sein können, und bringt dafür folgenden Beweis (§20):

Nehmen wir zwei beliebige Größen, z.B. 5 und 12: so leuchtet ein, dass die Menge der Größen, welche es zwischen Null und 5 gibt (oder die kleiner als 5 sind), ingleichen auch die Menge der Größen, die kleiner als 12 sind, unendlich sei; und ebenso gewiss ist die letzte Menge größer als die erste zu erklären, da ja diese unwidersprechlich nur ein Teil von jener ist. ... Allein, nicht minder wahr als all Dieses ist auch Nachstehendes: wenn x was immer für eine zwischen Null und 5 gelegenen Größe bezeichnet, und wir bestimmen das Verhältnis zwischen x und y durch die Gleichung:

$$5y = 12x ;$$

so ist auch y eine zwischen Null und 12 liegende Größe; und umgekehrt, so oft y zwischen Null und 12 liegt, so liegt x zwischen Null und 5. Auch folgt aus jener Gleichung, dass zu jedem Wert von x nur ein Wert von y, und umgekehrt gehöre. Aus diesem Beiden ist aber klar, dass es zu jedem in der Menge der zwischen Null und 5 liegenden Größen x eine in der Menge der zwischen Null und 12 liegenden Größen y gebe, die sich mit jener zu einem Paare verbinden lässt, mit dem Erfolge, dass nicht ein einziges der Dinge, aus denen diese beiden Mengen bestehen, ohne Verbindung zu einem Paare bleibt und auch kein einziges in zwei oder mehreren Verbindungen auftritt.

(11) Veranschaulichen wir die Problemstellung anhand einer Skizze. Es gibt zwei Mengen X und Y, die u.a. folgende Elemente enthalten:

X: {0, 1, 2, 3, 4, 5}

Y: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Die Bereiche zwischen den hier angeführten Elementen von X bzw. Y sind wiederum mit unendlich vielen Zahlen aufgefüllt.

Das Paradoxon besteht darin, dass die Mengen X und Y (angeblich) zugleich *verschieden groß* und *gleich groß* sind. Ersteres ergibt sich daraus, dass X eine Teilmenge von Y ist: Y enthält 7 Elemente mehr als X, ist also größer (mächtiger) als X. – Zweiteres begründet Bolzano damit, dass die Gleichung $5y = 12x$ unendlich viele Lösungen hat, die – die nach dem Prinzip der Paarbildung – jeweils genau einem x genau ein y zuordnen. Diese Zuordnung "beweist" die Gleichmächtigkeit der beiden Mengen.

(12) Die Argumente, die das Paradoxon erzeugen, haben jedoch mehrere Tücken. Betrachten wir zunächst die erste Behauptung: dass X und Y *ungleich große* unendliche Mengen wären.

Es ist einfach, diese Behauptung zu bestreiten: wir brauchen nur darauf verweisen, was im Teil I des Essays dargelegt wurde: dass Größenvergleiche von unendlichen Mengen keine sinnvollen Aussagen sind, weil es nichts gibt, was dabei verglichen wird. – Wer indessen darauf beharrt, dass es *zulässig* sei zu sagen, dass unendliche Mengen zugleich *gleich groß* und *ungleich groß* sein könnten, verwickelt sich – im Rahmen der obigen Behauptung – in folgendes Problem:

Er muss annehmen, dass die Menge Y nach Abzug des "endlichen Rests" (der Zahlen von 6 bis 12) *gleich groß* ist wie die Menge X, der dieser "Rest" von vornherein fehlt. Denn nur unter dieser Annahme liefert die Methode der Paarbildung das gewünschte Ergebnis: dass kein Element übrigbleibt, wodurch X und (Y – Rest) als gleich mächtig erwiesen werden. Diese Annahme ist jedoch unbewiesen, und – schlimmer noch – sie ist völlig unverbindlich, zumal die Unendlichkeitstheoretiker betonen (definieren), dass unendliche Mengen nicht notwendig gleich groß sein müssen.

Kann mittels Paarbildung nicht bewiesen werden, dass unendliche Mengen gleich mächtig sind, dann ist eine diesbezügliche Annahme hinsichtlich der Menge X und der – um die 7 Elemente reduzierten – Menge Y haltlos. Somit ist es auch unzulässig zu sagen, dass Y + 7 größer sei als X.

(13) Gehen wir zur zweiten Behauptung: dass X und Y *gleich groß* (mächtig) wären. Auch hier können wir auf das bereits Gesagte verweisen: dass solche Aussagen – Größenvergleiche unendlicher Mengen – sinnlos sind. Doch verlangt das Argument, das die Behauptung stützt, eine genauere Analyse, weil es sich durch seine Form (eine mathematische Gleichung) den Anschein der Erhabenheit über unsere Kritik gibt: die Gleichung: $5y = 12x$ hat unbestreitbar unendlich viele Lösungen, und jede ordnet einem x genau ein y zu. Beweist sie tatsächlich, dass X und Y gleich groß sind?

Keineswegs. Um den Betrug aufzudecken, konstruieren wir ein Beispiel, das ihn deutlich erkennen lässt. Wir wollen zu diesem Zweck annehmen, dass die Mengen X und Y nur die angegebenen *ganzen* Zahlen enthalten, also:

X: {0,1,2,3,4,5}

Y: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.

Die Aufgabe lautet nun, Paarbildung zwischen den Elementen von X und Y vorzunehmen, wobei kein Element ungepaart bleiben darf. Dies soll durch die Gleichung $5y = 12x$ bewerkstelligt werden.

Sehen wir uns die Lösungen der Gleichung genauer an. Zu diesem Zweck forme ich die Gleichung um in: $y = 12/5x = 2,4x$. Die folgende Tabelle zeigt die Lösungen (y-Werte) für den Wertebereich: $5 \geq x \geq 0$.

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2,4	4,8	7,2	9,6	12

Es wird offenbar, dass die Lösung der Gleichung Zahlen ergibt, die keine Elemente der Menge Y sind. Denn Y enthält *ganze Zahlen* zwischen 12 und Null, während Zahlen wie 9,6 oder 7,2 rationale Brüche sind. Daraus wird zweierlei ersichtlich:

Erstens: was die Gleichung hier "paart", sind *Zahlenwerte*, nicht *Elemente*. Bolzanos Beweis beruht auf der Konfundierung von "Zahlenwert" und "Element".

Zweitens: die Lösung ist nur möglich, indem die Definition der Menge Y (ganze Zahlen) spontan geändert wird und Y nunmehr auch rationale Brüche mit einer Dezimalstelle enthält. Lässt man einstellige Dezimalzahlen als Elemente von Y zu, dann werden bei der nächsten Paarung zweistellige erforderlich, usw. Mit anderen Worten: es kommt laufend zur Bildung *neuer* (= neu definierter) Mengen. Was also "gepaart" wird, sind nicht mehr die Elemente der ursprünglichen Mengen, sondern die Elemente neu gebildeter Mengen. Die Aufgabe, die Elemente der *ursprünglichen* Mengen X und Y zu paaren, wird aber nicht gelöst.

(14) Der Unendlichkeitstheoretiker wird darauf entgegnen: "Dieser Einwand trifft nur auf das konstruierte Beispiel zu, welches von zwei *endlichen* Mengen ausging, die nur *ganze Zahlen* enthalten. In der unendlichen Menge aber sind alle denkbaren Zahlen, mit unendlich vielen Kommastellen, schon enthalten, sodass alle Lösungen, die die Gleichung liefert, auch und zugleich Elemente der Menge Y sind."

Diese Entgegnung konfundiert wiederum "Element" und "Zahlenwert", indem sie annimmt, dass jeder denkbare Zahlenwert genau ein Element der Menge bildet. In diesem Fall müsste jeder Zahlenwert *genau ein einziges* Mal in der Menge vorkommen – und nicht etwa doppelt oder dreifach. Das ist aber keine ausgemachte Sache: derselbe Zahlenwert kann durch mehrere Elemente repräsentiert werden, zum Beispiel in der Menge: {1,2,2,2,3,4,5}. Sie hat 7 Elemente; die Gleichung liefert für die drei Elemente 2,2,2 aber nur einen Zahlenwert. Also wird durch die Paarung von *Zahlenwerten* nicht die Paarung von *Elementen* gewährleistet. Und da in einer unendlichen Menge nicht ausgeschlossen werden kann, dass manche Zahlenwerte

mehrfach vorkommen (also durch mehrere Elemente repräsentiert sind), ist die Entgegnung nicht schlüssig.

(15) Das obige Paradoxon kommt also durch die Verwechslung von "Element" und "Zahlenwert" zustande. Es gibt vor, *Elemente* zu paaren, behandelt diese aber wie *Zahlenwerte*, indem es sie – wenn die Paarzuordnung es erfordert – einfach teilt. Aber das ist unzulässig: man kann Elemente nicht teilen.

Man kann zwar korrekterweise sagen: "Den Bereich zwischen zwei *Zahlen* können unendlich viele andere *Zahlen* einnehmen", aber man kann nicht sagen: "Den Bereich zwischen zwei *Elementen* können unendlich viele andere *Elemente* einnehmen". Dieser Bereich existiert nicht. Ein Element ist eine diskrete Einheit, kein Kontinuum, und die Reihe der Elemente bildet keine *Zwischenräume*, die man mit eingeschobenen "kleineren" Elementen ausfüllen könnte.

Die Verwechslung – bzw. Vermischung – von diskreter und kontinuierlicher Einheit spielt auch beim Paradoxon von Punkt und Linie eine Rolle. Man definiert zunächst den Punkt als diskrete Einheit, um ihn dann wie ein Kontinuum zu behandeln. "Die Linie besteht aus (unendlich vielen) Punkten, und jeder Punkt kann wieder in unendlich viele Punkte geteilt werden" – wer so redet, verwischt den Unterschied zwischen diskret und kontinuierlich. Aber das Problem liegt noch tiefer; analysieren wir daher das Punkt-Linien-Paradoxon genauer.

Teil IV

(16) Das Punkt-Linien-Paradoxon hat im Grunde eine leicht erkennbare Ursache: eine inkonsistente Definition von "Punkt" (und davon abgeleitet: "Linie"). In einer bekannten Formulierung lautet es: "Eine Linie besteht aus unendlich vielen Punkten.– Wie aber kann eine *endliche* Linie aus *unendlich* vielen Punkten bestehen? Und: wie können zwei verschieden lange Linien zugleich aus unendlich vielen Punkten bestehen?"

(17) Das Paradoxon in dieser Formulierung hat eine klare Konsequenz: wenn eine – hinsichtlich ihrer Länge – *endliche* Linie aus *unendlich* vielen Punkten besteht, dann folgt daraus, dass die Punkte keine Länge besitzen. Sie haben mit der Länge der Linie so wenig zu tun wie ihre Farbe: ob die Linie rot, schwarz oder grün ist, hat keinerlei Bedeutung für ihre Länge oder ihre Teilbarkeit. Ebenso wenig die Anzahl der Punkte.

Diese Konsequenz führt zur (geläufigen) Definition des Punkts als "Objekt ohne Ausdehnung". Die Definition ist sehr unglücklich, denn sie impliziert, dass ein Punkt – da er keine Ausdehnung hat – *keine räumliche* Größe ist³. Ausdehnung ist *das* Definiens von Räumlichkeit. Was nicht ausgedehnt ist, ist weder Teil des Raums noch durch eine räumliche Messgröße (Länge, Fläche) bestimmbar. Es wäre auch sinnlos zu sagen, dass ein Punkt *extrem klein* sei – so sinnlos, wie dass *Grünes* extrem klein sei. Auch die Angabe

³ Das Gleiche gilt natürlich auch für den Punkt als zeitliche Größe.

seiner Lage im Raum (in einem Koordinatensystem) wäre nicht möglich, denn ein "Objekt ohne Ausdehnung" besitzt keinen Ort, den es einnimmt. Es ist identisch mit dem (räumlichen) Nichts. – Irgendwie erinnert diese Definition an jene Erzählung, wo ein Londoner Fremdenführer einer Gruppe Touristen den Themsehafen zeigt und vor einem Dock erklärt: "Hier ist die Stelle, wo der Duke of Wellington seine berühmten Worte sprach. – Die Worte hat er allerdings nie gesprochen."

Eine weitere unglückliche Folge dieser Definition ist, dass aus Punkten niemals eine Linie, eine Fläche oder gar ein Volumen wird. Was kein räumliches Objekt ist, kann nicht zu größeren räumlichen Objekten zusammengefügt werden. So wenig, wie mit Symphonien ein Haus gebaut werden kann, so wenig ergeben unausgedehnte Punkte durch Aneinanderreihung jemals eine Linie.⁴

(18) Will man dem Punkt eine Rolle in der Mathematik zugestehen, dann muss man ihm Ausdehnung zuerkennen. Aber nicht eine *unendlich kleine*! Wir wissen inzwischen, dass Ausdrücke dieser Art sinnlos sind. "Klein" ist eine Charakterisierung, die auf dem Vergleich von Messgrößen beruht. Zum Beispiel des Durchmessers: der Mond ist klein relativ zur Sonne, ein Fußball ist klein relativ zum Mond, eine Murmel klein relativ zum Fußball, usw. Der Sinn von "klein" ergibt sich nur durch Vergleich von Messwerten – sonst wäre es unsinnig, sowohl den Mond als auch die Murmel als klein zu bezeichnen. Unendliches aber besitzt – das haben wir im Teil I klargemacht – keinen Messwert: weil er unbestimmbar ist. Folglich kann es mit nichts verglichen werden, um zu sehen, ob es groß oder klein wäre. Der Ausdruck "unendlich klein" ist eine *Contradictio in adjecto*.

Akzeptiert man die Definition trotzdem, dann handelt man sich den ganzen Rattenschwanz von Problemen ein: gibt es größere und kleinere Punkte? Kann man einen Punkt, der doch schon unendlich klein ist, nochmals unendlich oft teilen? Wie viele Punkte haben auf einem Punkt Platz? usw.

(19) So lautet also das Dilemma: entweder ist der Punkt ausgedehnt – dann ist er ein Kontinuum und teilbar, und folglich kein Punkt. Oder er ist unausgedehnt – dann ist er keine räumliche (oder zeitliche) Größe, sondern ein Nichts; folglich auch kein Punkt. – Was nun?

⁴ Die unvermeidliche Konsequenz aus dieser Einsicht ist: dass die Behauptung: "die Linie besteht aus unendlich vielen Punkten" falsch ist. Derartige Punkte sind metaphysische Geistwesen, aber keine mathematischen oder räumlichen Größen. – Aber man kann eine Linie doch unendlich oft teilen, nicht wahr? – Ja, gewiss. – Und was erhält man dabei? – Längen, immer nur Längen! Die Teilung einer Länge ergibt stets wieder Längen, niemals jedoch (unausgedehnte) Punkte. Dass die Teilung einer Linie Punkte ergäbe, resultiert aus einer psychologischen Täuschung: bei dem Versuch, sich die endlose Teilung bildhaft vorzustellen, werden die immer kürzer werdenden Linien irgendwann mit Punkten gleichgesetzt. Es handelt sich dabei eine unzulässige Übertragung der bildhaften Anschauung auf einen abstrakten Sachverhalt. – Gesteht man indessen zu, dass mit der Teilung der Linie auch die Punktmenge verringert wird, dann kommt man notwendig zu einer Definition von Punkt, die seine räumliche Ausdehnung inkludiert. In diesem Fall besteht die endliche Linie notwendig aus einer endlichen Zahl von Punkten.

Ich denke, die Lösung des Problems ist die Einführung eines *Standardpunkts*. Ein Standardpunkt ist ein Gebilde, dessen Größe standardisiert, d.h. verbindlich festgelegt ist (wie die des Meters). Welche Größe und Form ein solcher Punkt besitzt, wäre bei einem internationalen Expertenkongress festzulegen. Zum Beispiel könnte ein zweidimensionaler Raumpunkt definiert sein als eine Quadratfläche von 1nm^2 , ein Punkt im Raum als Kubus mit einem Volumen von 1nm^3 .

Solche Größen sind praktikabel: sie sind klein genug, um bei geometrischen Messungen nicht ins Gewicht zu fallen, und groß genug, um Aussagen wie: "eine Linie der Länge x besteht aus n Punkten" gehaltvoll zu machen. Zugleich wäre dann Schluss mit den paradoxen Behauptungen, wie: dass zwei unterschiedlich lange Linien jeweils unendlich viele Punkte beinhalten, oder dass eine Linie eine Länge ohne Breite ist. Die geometrischen Größen – Flächen und Volumina – können dann sinnvoll auf ihn bezogen werden.

Es wäre auch zulässig, von *kleineren* Einheiten als dem Standardpunkt zu sprechen, etwa von einem halben oder zehntel Standardpunkt – dies könnte im subatomaren Bereich sinnvoll sein. Dass aber ein Punkt in unendlich viele weitere *Punkte* unterteilt werden könne, das wäre falsch: indem man ihn teilt, erhält man keine *Punkte*, sondern halbe Punkte, viertel Punkte, zehntel Punkte, usw.

(20) Ich möchte die Diskussion der Frage, ob Punkte diskrete oder teilbare Entitäten sind, nicht beenden, ohne einen Text Bolzanos zu zitieren. Dieser Text demonstriert das Dilemma, das entsteht, wenn man einerseits erklärt, dass Endliches zwar in unendlich Kleines teilbar ist, andererseits aber nicht konzedieren will, dass unendlich Kleines zu endlichen Größen addiert werden kann. Die Lösung des Dilemmas bei Bolzano ist einzigartig: es ist selten, dass ein so schreiender Widerspruch so unverblümt behauptet wird (man vergleiche den ersten und den letzten Satz des Zitats) (§38):

Dass je zwei Zeitpunkte noch durch eine unendliche Menge dazwischenliegender Zeitpunkte getrennt sind; dass es ebenso zwischen je zwei Punkten im Raum eine unendliche Menge dazwischenliegender gibt; ja dass es selbst im Reich der Wirklichkeit zwischen je zwei Substanzen noch eine unendliche Menge anderer gebe – ist allerdings zuzugestehen; aber was folgt hieraus das einen Widerspruch enthielte? Nur so viel folgt, dass durch zwei Punkte allein, ja auch durch drei, vier und jede bloß endliche Menge derselben noch kein Ausgedehntes erzeugt wird. Dies alles gestehen wir selbst, ja wir gestehen, dass auch eine unendliche Menge von Punkten nicht immer zur Erzeugung eines Continuums, z.B. einer auch noch so kurzen Linie, hinreicht, wenn diese Punkte nicht zugleich die gehörige Anordnung haben. ... so können wir nicht umhin zu erklären, dort, aber auch nur dort sei ein Continuum vorhanden, wo sich ein Inbegriff von einfachen Gegenständen (von Punkten in der Zeit oder im Raum...) befindet, die so gelegen sind, dass jeder einzelne derselben für jede auch noch so kleine Entfernung wenigstens einen Nachbarn in diesem Inbegriff habe.

Teil V

(21) Ein interessantes Paradoxon ist das folgende, das Bolzano im §33 seines Buchs beschreibt. Interessant ist es deshalb, weil es einen Hinweis auf eine möglicherweise sinnvolle Interpretation des Ausdrucks "unendlich", angewendet auf Mengen, liefert:

Man betrachte die Mengen A und B, wobei A die Menge der natürlichen Zahlen ist (1, 2, 3, usw.) und B die Menge ihrer Quadrate (1^2 , 2^2 , 3^2 , usw.)

A: {1, 2, 3, 4, 5, 6, usw.};

B: {1, 4, 9, 16, 25, 36, usw.}.

Der Vergleich der beiden Mengen zeigt dreierlei:

- erstens, dass B eine Teilmenge von A ist,
- zweitens, dass A und B gleich viele Elemente besitzen (müssen), da jedes Glied von B als Quadrat einer Zahl von A gebildet wird;
- drittens, dass die Summe aller Zahlen von B größer sein muss als die Summe der Zahlen von A, weil – mit Ausnahme des ersten Elements – jedes Element von B einen größeren Zahlenwert besitzt als das jeweilige von A.

Das Paradoxon ist hier ein doppeltes: einerseits, dass A und B gleich viele Elemente enthalten, obwohl B – deutlich sichtbar – zahlreiche Elemente von A nicht enthält (ohne im Gegenzug ein Element zu besitzen, das nicht auch A enthielte); und andererseits, dass die Summe der Zahlen von B größer ist als die von A, obwohl A alle Zahlen von B enthält und darüber hinaus noch weitere. Hiermit wäre der Lehrsatz, dass der Teil nicht größer sein kann als das Ganze, offen widerlegt.

(22) Nun ist klar, dass das Paradoxon ein bloß vermeintliches ist, weil, statt mit Begriffen gedacht, mit Worten geklingelt wird. Von unendlich vielen Elementen lässt sich weder eine Anzahl noch eine Summe bestimmen, die mit der Anzahl bzw. Summe der Elemente einer anderen Menge verglichen werden könnte. Aussagen dieser Art sind sinnlos.

Trotzdem wäre ein Vergleich der beiden Mengen A und B hinsichtlich gewisser Eigenschaften interessant. Vor allem die Fragen, die das Paradoxon aufwirft, fordern heraus: ist die Zahlensumme von B wirklich größer als die von A, obwohl B nur eine Teilmenge von A ist, und A wesentlich mehr Elemente als B enthält?

Um die Fragen zu beantworten, müssen A und B (hinsichtlich dieser Eigenschaften) vergleichbar sein. Angesichts unendlicher Mengen heißt das: es muss erst etwas Vergleichbares geschaffen werden. Zu diesem Zweck schlage ich vor, solchen Problemen eine *empirische Formulierung* zu geben und sie mit den Verfahren der empirischen Wissenschaften zu untersuchen (auch wenn diese Vorgangsweise den Mathematikern unvertraut, vielleicht sogar unzulässig für ihren Fachbereich erscheint).

Das empirische "Beweisverfahren" sieht im Prinzip vor, dass Hypothesen gebildet und überprüft werden, wobei die Überprüfung – sofern nicht alle Fälle der Population (Gesamtmenge) verfügbar sind – an Stichproben durchgeführt wird, die aus ihr entnommen werden.

(23) Betrachten wir nochmals die beiden Mengen A und B:

A: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, usw.};

B: {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, usw.}.

Da ihre Elemente eine nie endende Reihe bilden, sind A und B unendliche Mengen. In Anlehnung an Bolzano stellen wir – hinsichtlich ihrer Eigenschaften – drei Hypothesen auf:

Hypothese 1: A und B enthalten gleich viele Elemente;

Hypothese 2: B ist eine Teilmenge von A (d.h. alle Elemente von B sind auch in A enthalten);

Hypothese 3: die Summe der Zahlen von B ist größer als die Summe der Zahlen von A.

Um die Hypothesen überprüfen zu können, muss zuvor der Begriff der "unendlichen Menge" präzisiert werden.

(24) "Menge" bezeichnet die Gesamtheit aller Elemente, die durch eine gegebene Definition als zusammengehörig erwiesen werden. Eine "wohlgeordnete Menge" liegt vor, wenn die Elemente nach einem Kriterium geordnet sind. Dieses Kriterium ist im Regelfall der Zahlenwert der Elemente, wobei die Anordnung nach aufsteigendem Zahlenwert erfolgt. Die wohlgeordnete Menge der natürlichen Zahlen besitzt daher die Form: {1, 2, 3, 4, 5, 6, usw.}.

Was ist eine "unendliche Menge"? Die übliche Charakterisierung als "Menge mit unendlich vielen Elementen" ist – wie bereits gesagt – dubios: denn "viele" ist eine relative Quantifizierung, die ihren Sinn nur durch *Vergleich von Häufigkeiten* erhält (z.B. sind 100 Euro *viel* Geld für einen Bettler, aber *wenig* für einen Millionär). Eine unendliche Menge bildet keine bestimmbare Anzahl von Elementen aus, weshalb diese auch nicht mit der Anzahl anderer Mengen verglichen werden kann. Wir müssen daher die genannte Charakterisierung als sinnlos verwerfen.

(25) Wie anders kann "unendliche Menge" definiert werden? Überlegen wir dazu, wie unendliche Mengen entstehen. Offenkundig *nicht* durch Addition oder Multiplikation *endlicher* Mengen: endliche Mengen ergeben, wie immer manipuliert, stets wieder endliche Mengen. Unendliche Mengen hingegen entstehen durch Erzeugungsregeln, die eine ad-infinitum Generierung von Elementen ermöglichen. Diese Regeln schreiben eine konkrete Operation vor, die an einem Startelement erstmals durchgeführt wird und von da an mit jedem neu entstandenem Element wiederholt wird.

So wird die Menge der natürlichen Zahlen gebildet, indem, beginnend mit dem Startelement 1, der Zahlenwert 1 addiert wird, und diese Addition an

jedem neuen Element wiederholt wird. Da bei jedem Schritt ein neues Element entsteht, lässt sich der Erzeugungsprozess ad infinitum fortführen. Der Bezug auf den Erzeugungsprozess liefert die einzig sinnvolle Definition von "unendlicher Menge": als einer Menge, die nie abgeschlossen ist, weil fortwährend neue Elemente generiert werden.⁵ – In dieser Definition wird der Ausdruck im Weiteren verwendet.

(26) Ist die Menge nicht abschließbar, dann ist sie niemals als Ganze verfügbar, d.h. sie kann nie in ihrer endgültigen Gestalt untersucht, analysiert, zu anderen Mengen addiert, etc., werden. Eigenschaften, die ihr zugesprochen werden, können nicht unmittelbar verifiziert oder falsifiziert werden, da ja die besagte Menge nicht zur Verfügung steht.

Der einzige Weg, eine unendliche Menge dennoch zu untersuchen, besteht darin, aus ihr Stichproben zu ziehen. Zu diesem Zweck wird der Erzeugungsprozess an einer beliebigen Stelle abgebrochen und die bis dahin gebildete Teilmenge als Repräsentant der unendlichen Menge betrachtet. "An beliebiger Stelle abbrechbar" ist gewissermaßen ein definierendes Merkmal unendlicher Mengen: es bezieht sich auf den Schritt des Generierungsprozesses. Im Unterschied dazu besitzen endliche Mengen begrenzt viele Glieder, weshalb aus ihnen nicht Stichproben beliebiger Größe entnommen werden können. Unendliche kennen diese Einschränkung nicht; darin liegt ihr unterscheidendes Merkmal.

(27) Stichproben aus unendlichen Mengen werden gebildet, indem der Erzeugungsprozess der Elemente an beliebiger Stelle abgebrochen wird. Wird die Abbruchstelle (*punctum interruptionis*, *pir*) mit $pir = 50$ festgelegt, so bedeutet dies, dass die Generierung nach 50 Elementen beendet wird. Es versteht sich, dass die Generierung eine *wohlgeordnete* Menge erzeugt, d.h. dass die Elemente nach aufsteigendem Zahlenwert geordnet sind. An welcher Stelle der Abbruch erfolgt, ist primär eine Sache pragmatischer Gesichtspunkte: die Stichprobe soll hinsichtlich bestimmter Eigenschaften analysierbar sein. Es muss also gewährleistet sein, dass diese Eigenschaften in ihr ausreichend deutlich ausgebildet sind. Zugleich darf sie nicht zu viele Elemente enthalten, denn das könnte die Analyse erschweren (etwa wenn $pir = 1000^{1000}$.)

(28) Stichproben aus unendlichen Mengen bilden empirische Repräsentationen von unendlichen Mengen. Dadurch können die Eigenschaften unendlicher Mengen bzw. ihrer Elemente empirisch untersucht werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Eigenschaften unendlicher Mengen in ihren Stichproben in gleicher Weise auftreten wie in der unendlichen Menge selbst.

Ob diese Voraussetzung zutrifft, muss im Zweifelsfall überprüft werden. Dazu zieht man mehrere Stichproben unterschiedlicher Größe (z.B. 3 Stichproben X, Y und Z mit $pir(X) = 10$, $pir(Y) = 20$ und $pir(Z) = 50$) und vergleicht, ob die Ausprägung des untersuchten Merkmals konstant ist. Neben der *Konstanz* wäre auch ein *Trend* (z.B. auf einen bestimmten

⁵ Dieses "nicht abgeschlossen" ist eine *logische* Bestimmung, keine zeitliche oder räumliche – wiewohl der endlose Generierungsprozess auch zeitlich oder räumlich nie an eine Ende käme. Aber das ist ein anderes Problem. Hier geht allein um logische, nicht physische Eigenschaften von unendlichen Mengen.

Zahlenwert hin) ein Hinweis auf die Art der Merkmalsausprägung in der unendlichen Menge.

(29) Veranschaulichen wir das Gesagte an einem Beispiel: an der Prüfung der drei Hypothesen aus (23). Die beiden unendlichen Mengen, die zu vergleichen sind, sind A (die natürlichen Zahlen) und B (deren Quadrate):

A: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, usw.}

B: {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, usw.}.

Die erste Hypothese lautet, dass A und B gleich viele Elemente enthalten.

Die Hypothese ist leicht zu verifizieren: bricht man den Generierungsprozess bei z.B. $\text{pir} = 1000$ ab, so enthält jede Stichprobe 1000 Elemente. Der Abbruch lässt sich an beliebiger Stelle wiederholen: stets ist die Anzahl der Elemente in beiden Stichproben gleich. Man kann daraus schließen, dass A und B tatsächlich gleich viele Elemente enthalten.

Die zweite Hypothese lautet, dass B eine Teilmenge von A ist, d.h. dass alle Elemente von B auch in A enthalten sind. Diese Hypothese lässt sich empirisch *falsifizieren*: bricht man den Generierungsprozess bei $\text{pir} = 10$ ab, so findet man, dass nur 3 Elemente von Stichprobe B in Stichprobe A enthalten sind (nämlich 1, 4 und 9), während Stichprobe B weitere 7 Elemente enthält, die Stichprobe A nicht enthält. Ein analoges Ergebnis findet sich bei $\text{pir} = 100$: hier sind nur die ersten 10 Elemente von Stichprobe B auch Elemente von Stichprobe A. Bei $\text{pir} = 1000$ sind nur 31 Elemente von Stichprobe A in Stichprobe B enthalten. Weitere Stichprobenanalysen erbringen stets das gleiche Ergebnis. Also ist B keine Teilmenge von A.

Die dritte Hypothese lautet, dass die Summe der Zahlenwerte von B größer ist als die Summe der Zahlenwerte von A. Diese Hypothese wird empirisch wieder verifiziert, wie man anhand einiger Stichprobenanalysen sehen kann. Die folgende Tabelle zeigt, dass sich die Zahlensummen von A und B bei beliebigem pir so verhalten, dass die Summe der Elemente von B stets größer ist als die von A⁶:

pir	Summe aller {A}	Summe aller {B}
5	15	55
10	55	385
20	210	2870
100	5050	338350

Das Verfahren der empirischen Analyse unendlicher Mengen mithilfe von Stichproben erlaubt somit eine Entscheidung, welche der drei Hypothesen richtig ist. Dadurch löst es das obige (21) Paradoxon: von den widerstreitenden Behauptungen wird jeweils eine als falsch erwiesen. Es ist falsch, dass A und B nicht gleich mächtig sind; es ist falsch, dass B eine Teilmenge von A ist; und es ist falsch, dass die Summe der Elemente von A größer ist als die von B.

⁶ Die Summenbildung besteht in der Addierung mindestens zweier Elemente. Der Vergleich der Summen bei $\text{pir} = 1$ ist daher nicht möglich.

(30) Auch das Paradoxon, das in (2) erörtert wurde, lässt sich mit der empirischen Methode lösen. Betrachten wir dazu die drei Mengen N (natürliche Zahlen), N_g (gerade natürliche Zahlen) und N_u (ungerade natürliche Zahlen):

N : {1, 2, 3, 4, 5, usw.},
 N_g : {2, 4, 6, 8, 10, usw.},
 N_u : {1, 3, 5, 7, 9, usw.}.

Die erste Frage lautet: besitzen N , N_g und N_u jeweils gleich viele Elemente? Die Frage lässt sich durch Stichprobenanalysen eindeutig bejahen. Abbruch des Erzeugungsprozesses bei beliebigem pir liefert in allen drei Stichproben jeweils gleich viele Elemente.

Die zweite Frage lautet: ist N_g eine Teilmenge von N ? Dies ist offenbar nicht der Fall, wie die Stichprobenanalyse zeigt. Nehmen wir z.B. als Abbruchstelle $pir = 10$; dann erhalten wir:

$N/(pir = 10)$: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
 $N_g/(pir = 10)$: {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}.

Die Stichprobe von N_g enthält 5 Elemente, die nicht Elemente der Stichprobe von N sind. Ein analoges Ergebnis erhält man bei beliebiger Abbruchstelle. N_g ist also keine Teilmenge von N . – Gleiches gilt für N_u , wie man sich leicht selber überzeugen kann.

Damit wird das (scheinbare) Paradoxon aufgelöst: zwar stimmt, dass die drei Mengen (N , N_g und N_u) jeweils gleich mächtig sind, doch sind die beiden letzteren keine Teilmengen von N . Die Eigenschaft der Gleichmächtigkeit der drei Mengen bedingt nämlich, dass sie nicht die gleichen Elemente enthalten. Bildhaft vorgestellt, läuft der Generierungsprozess von N_g und von N_u dem Generierungsprozess von N stets voraus, sodass an jeder beliebigen Abbruchstelle (pir) N_g und N_u bereits Elemente enthalten, die N noch nicht enthält. Dieser "Vorsprung" von N_g und von N_u wird von N in alle Unendlichkeit nicht eingeholt.

(31) Das Verfahren der empirischen Analyse unendlicher Mengen lässt also deren Eigenschaften klarer erkennen als ihre rein theoretische Betrachtung. Dazu verhilft im Weiteren – was bisher vernachlässigt wurde – eine sprachanalytische Klärung des Begriffs der Unendlichkeit. Wie wir dabei gefunden haben, kann "unendlich" nicht von Quantifizierungen ausgesagt werden, wie etwa "unendlich viele" oder "unendlich klein" oder "unendlich lang". Solche Ausdrücke besitzen keinen Sinn, da Quantifizierungen nur möglich sind, wenn eine Messgröße (Länge, Anzahl,...) in endlicher Ausprägung gegeben ist. Messen besteht darin, eine vorhandene Ausprägung einer Messgröße in Relation zu einer Grundeinheit (Maßeinheit) zu setzen und zu bestimmen, wie oft die Grundeinheit darin enthalten ist. Eben dies lässt sich bei Mengen, deren Elemente eine nie endende Serie bilden, nicht vornehmen.

(32) Eine sehr richtige Darstellung des Konzepts des Unendlichen, einschließlich der Kritik an einer irrigen Interpretation, findet sich übrigens bei Kant⁷. Ich beende meinen Essay, indem ich diese instruktive Textpassage ausführlich wiedergebe. Ich erlaube mir, darin einige Worte, die ich für besonders bedeutsam halte, kursiv herauszuheben.

Ich hätte die Thesis [dass die Welt einen Anfang in der Zeit und im Raum hat] auch dadurch dem Scheine nach beweisen können, dass ich von der Unendlichkeit einer gegebenen Größe, nach der Gewohnheit der Dogmatiker, einen fehlerhaften Begriff vorangeschickt hätte. [Nämlich:] Unendlich ist eine Größe, über die keine größere (d.i. über die darin enthaltene *Menge* einer Einheit) möglich ist. Nun ist keine Menge die größte, weil immer noch ein oder mehrere Einheiten hinzugetan werden können. Also ist eine unendliche gegebene Größe, mithin auch eine (der verflossenen Reihe sowohl als der Ausdehnung nach) unendliche Welt unmöglich: sie ist also beiderseitig begrenzt. – So hätte ich meinen Beweis führen können: allein dieser Begriff stimmt nicht mit dem, was man unter einem unendlichen Ganzen versteht [, überein]. Es wird dadurch *nicht vorgestellt, wie groß es sei*, mithin *ist sein Begriff auch nicht der Begriff eines Maximums*, sondern es wird dadurch nur sein *Verhältnis* zu einer als beliebig anzunehmenden Einheit, in Ansehung deren dasselbe größer ist als die [=deren] Zahl, gedacht. ... Der wahre Begriff der Unendlichkeit ist: dass die sukzessive Synthesis [= Erzeugung] der Einheit in Durchmessung eines Quantums niemals vollendet sein kann.

⁷ Kritik der reinen Vernunft, Transzendente Dialektik: Anmerkung zur ersten Antinomie (B 458, 460)