Neotraditionelle Quantorenlogik I

Dieser Essay beinhaltet eine formalisierte Version der traditionellen (auf Aristoteles zurückgehenden) Logik. Er besteht aus drei Teilen:

I. Grundlagen (anschließend)
II. Neotraditionelle Monologistik (separate Datei)
III. Neotraditionelle Syllogistik (separate Datei).

Die Formalisierung ist denkbar einfach dargestellt; ihr Verständnis erfordert – außer ein wenig Vertrautheit mit der modernen (mathematischen) Prädikatenlogik – keine Voraussetzungen.

Warum diese Formalisierung? Die mathematische Prädikatenlogik hat den Nachteil, dass sie die Quantifizierung mit *Existenzannahmen* junktimiert: die Deutung des Quantor "∃" als "*es existiert*" und das Axiom "Fa → ∃xFx" binden diese Logik an die Ontologie. Damit wird die Behandlung mancher ontologischer (auch weltanschaulicher oder religiöser) Fragestellungen präjudiziert. – Meiner Ansicht nach muss die Logik ontologisch neutral sein, d.h. frei von existenziellen Präjudizien. Daher bevorzuge ich die alte, traditionelle Logik, deren Art zu quantifizieren keine Existenzbehauptungen impliziert.

Teil I: Grundlagen der neotraditionellen Quantorenlogik

1.1. Quantoren und Quotienten

Die traditionelle Logik kennt drei Quantoren: "alle", "einige" und "kein". Folgende Zeichen mögen für sie stehen:
■ = "alle";
▣ = "einige";
□ = "kein".

Quantoren sind Elemente von *quantifizierenden Sätzen*, die im Folgenden *Quotienten* genannt werden. Beispiele für Quotienten sind: "Alle Katholiken sind Christen", "einige Griechen sind Philosophen", "kein Insekt ist ein Säugetier", "einige Amerikaner sind nicht Weiße".

1.2. Formalisierung von Quotienten

Die Formalisierung von Quotienten erfolgt mittels derselben Zeichen und syntaktischen Regeln wie die Formalisierung von Sätzen in der modernen Prädikatenlogik. Nur an die Stelle der Operatoren "∀" und "∃" treten in der neotraditionellen Quantorenlogik die Quantoren ■, ▣ und □.

Es bezeichnen:
- P, Q, R, … Prädikate,
- a, b, c,... freie Individuenvariable,
- x, y, z, ... gebundene Individuenvariable.

Die Junktoren sind die gleichen wie in der Aussagenlogik, also

- ¬ ("nicht"),
- → ("wenn-dann"),
- ∧ ("und"),
- ∨ ("oder"),
- ↔ ("äquivalent").

Beispiele für formalisierte Quotienten:

- "Alle x (Individuen) sind sterblich": ■x(Sx).
- "Kein x ist allwissend": □x(Ax).
- "Einige x sind Philosophen": ◘x(Px).
- "Einige x sind keine Philosophen": ◘x(¬Px).
- "Wenn alle Athener Griechen sind, dann sind einige Griechen Athener": ■x(Ax→Gx) → ◘x(Gx→Ax).

1.3. Die Bedeutung der Quantoren

Die Bedeutung der Quantoren ergibt sich aus ihrem Gebrauch in der Alltagssprache, der sie wechselseitig definiert:

"Alle": Quotienten der Form "alle x sind P" sind bedeutungsgleich mit "kein x ist non-P". Wird Bedeutungsgleichheit durch logische Äquivalenz ausgedrückt, dann gilt: ■x(Px) ↔ □x(¬Px).

"Kein": Quotienten der Form "kein x ist P" sind bedeutungsgleich mit "alle x sind non-P". Demnach gilt: □x(Px) ↔ ■x(¬Px).

"Einige": Quotienten der Form "einige x sind P" sind bedeutungsgleich mit "nicht alle x sind non-P". Demnach gilt: ◘x(Px) ↔ ¬■x(¬Px).

1.4. Extensional gebundene Quantoren

Ausdrücke wie "■x(Px)" lassen offen, worauf sich die gebundene Individuenvariable x bezieht (sie bezieht sich in diesem Fall auf beliebige, undefinierte Individuen). Im Regelfall aber ist festgelegt, worüber man spricht – bzw. wer mit dem "x" beim Quantor und beim Prädikat gemeint ist: die Individuenvariable besitzt eine Extension, über deren Elemente quantifiziert wird.

In formaler Hinsicht erfolgt die Festlegung auf eine Extension, indem ein *konditionales* Merkmal (Prädikat) angegeben wird, das die Individuen, über die gesprochen wird, besitzen. Sind es beispielsweise *Menschen*, über die quantifiziert wird, dann muss das Prädikat "Mensch" konditional in die Form des Quotienten eingehen.

Zum Beispiel:

- "alle Menschen sind sterblich": ■x(Mx→Sx) ("für alle x: wenn x ein Mensch ist, dann ist x sterblich)";
- "einige Menschen sind vernünftig": ◘x(Mx→Vx);
- "kein Mensch ist allwissend": □x(Mx→Ax).

Dadurch wird der Quantor extensional gebunden, d.h. auf eine definierte Individuenmenge bezogen. Sätze mit extensional gebundenem Quantor besitzen typischerweise das *Konditional* als Grundstruktur.

Die allgemeine Form eines Quotienten werde durch das folgende Schema symbolisiert:

"•x(Sx→Px)".

Dabei steht "•" für einen beliebigen Quantor (d.h. für ■, ◘, □), "S" für den Subjektbegriff und "P" für den Prädikatbegriff. Der Ausdruck in der Klammer (hier: "Sx→Px") heiße "Term". "Sx" und "Px" bezeichen den Subjekt*satz* bzw. Prädikat*satz*.

Bei extensional gebundenen Quantoren bezieht sich die Quantifizierung nur auf den Term! Mit anderen Worten: bei jedem Quotient gibt das konditionale Merkmal (das Subjektmerkmal) die Individuenmenge an, über die gesprochen wird.

Hier einige Beispiele:
- "Kein Mensch ist allwissend und allmächtig":
  □x(Mx→(AWx ∧ AMx)).

- "Einige Menschen, aber auch einige Tiere sind wagemutig":
  ◘x(Mx→Wx) ∧ ◘x(Tx→Wx).

- "Wenn alle Menschen sterblich sind, und kein Gott sterblich ist, dann ist kein Mensch ein Gott":
  (■x(Mx→Sx) ∧ □x(Gx→Sx)) → □x(Mx→Gx).

1.5. Quantoren und Terme
Die formalisierte Schreibweise der Quotienten macht deutlich, dass ein Quotient aus zwei Teilen besteht: aus dem *Quantor* und dem *Term*, d.i. der Zuordnung des Prädikats an das Subjekt (S→P). Quantor und Term werden durch die gebundene Individuenvariable (x) aufeinander bezogen.

Die Unterscheidung von Quantor und Term ist wichtig im Hinblick auf logische Umformungen, die mit bzw. innerhalb von Quotienten durchgeführt werden dürfen. Dies wird an späterer Stelle erörtert (vgl. 1.9. und 1.11.).

1.6. Quantorenlogische Prinzipien und Axiome
Die oben (1.3.) beschriebenen Beziehungen zwischen den Quantoren lassen sich als quantorenlogische Prinzipien auffassen und in einem System von Axiomen zusammenfassen. Für die Erstellung eines solchen Systems sind folgende Überlegungen hilfreich: offenbar gibt es für jeden Quantor *vier* Möglichkeiten, ein Prädikat P den Individuen einer Menge zuzusprechen. Dies sei am Beispiel von "alle" demonstriert:
- "alle x sind P": ■x(Px);
- "alle x sind non-P": ■x(¬Px);
- "nicht alle x sind P": ¬■x(Px);
- "nicht alle x sind non-P": ¬■x(¬Px).

Diese vier Möglichkeiten entsprechen den vier Grundtypen des quantifizierenden Urteils. Es gibt demnach:

- universell bejahende Urteile: "alle x sind P", ■x(Sx→Px),
- universell verneinende Urteile: "alle x sind non-P", ■x(Sx→¬Px),
- partikulär bejahende Urteile: "nicht alle x sind P", ¬■x(Sx→Px),
- partikulär verneinende Urteile: "nicht alle x sind non-P", ¬■x(Sx→¬Px).

Die vier Urteilstypen werden im Folgenden – gemäß der Tradition – mit den Kürzeln "A", "E", "I" und "O" gekennzeichnet, wobei die Zuordnung gilt:

- universell bejahend (= **a**ffirmativ): A,
- universell verneinend (= n**e**gativ): E,
- partikulär bejahend (= **li**mitierend): I,
- partikulär verneinend (k**o**nstriktiv): O.

Es lässt sich zeigen, dass alle vier Quotiententypen A, E, I und O auch mithilfe der beiden anderen Quantoren "einige" und "kein" ausgedrückt werden – in vollständiger und äquivalenter Weise. Zum Beispiel kann das universell verneinende Urteil: "alle x sind non-P" äquivalent formuliert werden als: "kein x ist P" und als: "es sind nicht einige x P":

"■x(Sx→¬Px)" ↔ "□x(Sx→Px)" ↔ "¬◘x(Sx→Px)".

Im Grunde benötigt man daher *nur einen* Quantor, um alle möglichen quantorenlogischen Urteile zu bilden. Da aber die Alltagssprache alle drei Quantoren verwendet, ist es zweckmäßig, sie alle in das formale System einzubauen, damit die logische Kunstsprache nicht allzu weit von der Alltagssprache abweicht. Leider entsteht dadurch eine gewisse Vielzahl an logisch äquivalenten Formulierungsmöglichkeiten, was die Einfachheit und Transparenz des Systems stört.

Eine Lösung dieses Problems besteht darin, eine Tafel der quantorenlogischen Äquivalenzen, d.h. aller äquivalenten Formulierungen pro Quotiententyp, zu verwenden. Dadurch lässt sich mit schnellem Blick feststellen, welche Formulierungen äquivalent sind und ggf. füreinander ausgetauscht werden können (Tabelle 1-1).

Tab. 1-1: Quantorenlogische Äquivalenzen

Quotiententyp	**"Alle"**		**"Kein"**		**"Einige"**
A	■x(Px)	↔	□x(¬Px)	↔	¬◘x(¬Px)
E	■x(¬Px)	↔	□x(Px)	↔	¬◘x(Px)
I	¬■x(¬Px)	↔	¬□x(Px)	↔	◘x(Px)
O	¬■x(Px)	↔	¬□x(¬Px)	↔	◘x(¬Px)

Gemäß Tabelle 1-1 sind Quotienten desselben Typs (derselben Zeile) äquivalent, d.h. sie können wechselseitig ersetzt werden. Durch je einen Repräsentanten eines Typs – also durch vier Quotienten – lässt sich ein quantorenlogisches System axiomatisieren.

1.7. Traditionelle und neotraditionelle Quantorenlogik

Die neotraditionellen Quotiententypen entsprechen den Satztypen "SaP", "SeP", "SiP" und "SoP" der traditionellen Logik. Dies wird deutlich, wenn man die Formalisierungen in Tabelle 1 in die verbale Sprache übersetzt (Tabelle 1-2). Das traditionelle Satzschema beinhaltet allerdings nicht die äquivalenten Quotienten.

Tab. 1-2: Quantorenlogische Äquivalenzen (verbalisiert)

Satztyp	"Alle"		"Kein"		"Einige"
SaP	**Alle x sind P**	↔	Kein x ist non-P	↔	Es ist nicht der Fall, dass einige x non-P sind
SeP	Alle x sind non-P	↔	**Kein x ist P**	↔	Es ist nicht der Fall, dass einige x P sind
SiP	Nicht alle x sind non-P	↔	Es ist nicht der Fall, dass kein x P ist	↔	**Einige x sind P**
SoP	Nicht alle x sind P	↔	Es ist nicht der Fall, dass kein x non-P ist	↔	**Einige x sind non-P**

Die traditionelle Logik formalisiert die quantifizierenden Urteile mithilfe der Abkürzungen "S" für "Subjekt" und "P" für "Prädikat", und den Typ der Quantifizierung mit den Kürzeln "a", "e" ,"i" ,"o", wobei die Zuordnung gilt:

- universell bejahend: S**a**P ("alle S sind P");
- universell verneinend: S**e**P ("kein S ist P");
- partikulär bejahend: S**i**P ("einige S sind P");
- partikulär verneinend S**o**P ("einige S sind non-P").

1.8. Axiome mit gebundenen Quantoren

Werden die Quotienten in Tabelle 1 mit extensional gebundenen Quantoren geschrieben (vgl. 1.4.), dann lauten sie (Tabelle 1-3):

Tab. 1-3: Quantorenlogische Prinzipien (Konditionale)

Typ	"Alle"		"Kein"		"Einige"
A	■x(Sx→Px)	↔	□x(Sx→¬Px)	↔	¬◘x(Sx→¬Px)
E	■x(Sx→¬Px)	↔	□x(Sx→Px)	↔	¬◘x(Sx→Px)
I	¬■x(Sx→¬Px)	↔	¬□x(Sx→Px)	↔	◘x(Sx→Px)
O	¬■x(Sx→Px)	↔	¬□x(Sx→¬Px)	↔	◘x(Sx→¬Px)

Obwohl die Grundstruktur des Quotienten das Konditional ist, ist es möglich, auch andere Junktoren in die Terme einzusetzen. Für Terme mit Konjunktion lauten die Prinzipien:

Tab. 1-4: Quantorenlogische Prinzipien (Konjunktionen)

Typ	"Alle"		"Kein"		"Einige"
A	■x(Sx∧Px)	↔	□x(Sx∧¬Px)	↔	¬◘x(Sx∧¬Px)
E	■x(Sx∧¬Px)	↔	□x(Sx∧Px)	↔	¬◘x(Sx∧Px)
I	¬■x(Sx∧¬Px)	↔	¬□x(Sx∧Px)	↔	◘x(Sx∧Px)
O	¬■x(Sx∧Px)	↔	¬□x(Sx∧¬Px)	↔	◘x(Sx∧¬Px)

1.9. Zur Metalogik der Quantoren

Werden Terme mit Junktoren verwendet (wie in den Tabellen 1-3 und 1-4), dann stellt sich die Frage, ob aussagenlogische Umformungen mit ihnen zulässig sind. Ist z.B. "□x(Sx→Px)" das Gleiche wie "□x(¬Sx ∨ Px)"? Aussagenlogisch betrachtet sind die beiden Terme äquivalent – doch gilt die Äquivalenz auch im Wirkfeld von Quantoren?

Offenbar nicht, wie folgende Überlegung zeigt: es stehe "◘x(Mx→Px)" für "einige Menschen sind Philosophen". Transformiert man den Term nach dem Modus tollens – eine wahrheitserhaltende Umformung –, dann lautet der transformierte Quotient: "◘x(¬Px→¬Mx)". In Worten: "einige Nicht-Philosophen sind keine Menschen".

Um die Zulässigkeit logischer Umformungen von Quotienten beurteilen zu können, sind zunächst einige metalogische Klärungen vorzunehmen.

Zuerst: welche logische Funktion hat der *Allquantor*? Offenbar die Behauptung *universeller Wahrheit*: d.h. die Behauptung, dass jede Aussage von der Art "ein individuelles S ist P" wahr ist. Die Aussage "*alle* Menschen sind sterblich" besagt demnach, dass *jede* Aussage, die einem menschlichen Individuum Sterblichkeit zuspricht, wahr ist: "Johannes ist sterblich", "Simon ist sterblich", "Anna ist sterblich", usw.

Welche logische Funktion hat der *Keinquantor*? Offenbar die Behauptung *universeller Falschheit*: d.h. die Behauptung, dass jede Aussage von der Art "ein individuelles S ist P" falsch ist. Die Aussage "*kein* Mensch ist allwissend" besagt demnach, dass *jede* Aussage, die einem menschlichen Individuum Allwissenheit zuspricht, falsch ist: "Plato ist allwissend", "Sokrates ist allwissend", "Aristoteles ist allwissend", usw.

Demgegenüber bleibt beim Quantor "einige" der Wahrheitsstatus der individualisierenden Aussagen offen: "einige Menschen sind eitel" – das lässt zu, dass Cäsar, Augustus und Nero eitel sind, Cicero und Seneca aber nicht. Demnach sind einige individualisierende Aussagen wahr, andere falsch.

➔ Daraus wird deutlich, dass logische Umformungen, bei denen die Wahrheit des Terms erhalten bleiben soll, *nur bei Quotienten mit dem Allquantor zulässig sind*. Denn nur er behauptet die Wahrheit der terminisierten Aussage. Hingegen subsumiert der Quantor "einige" wahre wie falsche Sätze; und der Quantor "kein" überhaupt nur falsche. Wahrheitserhaltende Transformationen sind unter diesen Umständen sinnlos.

1.10. Individualisierungen

Quantoren beziehen sich stets auf eine Menge von Individuen (auch wenn diese leer ist); man kann daher mit ihnen nur *allgemeine* Aussagen bilden. Trotzdem lassen sich aus ihnen individuelle Aussagen ableiten: dabei ist zu beachten, dass der *Allquantor* die Wahrheit aller subsumierten Einzelsätze behauptet; der *Keinquantor* hingegen die Falschheit.

Die Individualisierung des Quotienten "■x(Px)" ergibt daher "Pa";
die Individualisierung des Quotienten "□x(Px)" ergibt "¬Pa".
Quotienten mit dem Quantor "einige" lassen sich nicht individualisieren.

Bei konditionaler Schreibweise erfolgt die Individualisierung analog:
■x(Sx→Px), daher (Sa→Pa).
□x(Sx→Px), daher (Sa→¬Pa).

Um sich von der Richtigkeit der Individualisierung von "□x(Sx→Px)" zu überzeugen, kann man den Quotient zunächst in seine äquivalente Allform überführen (vgl. Tabelle 1-3): ■x(Sx→¬Px), und diese dann wie oben individualisieren.

1.11. Logische Umformungen von Quotienten

In der neotraditionellen Quantorenlogik sind zwei Arten von logischen (wahrheitserhaltenden) Umformungen von Quotienten zulässig:
a) die Äquivalenzumformung von *Quotienten* (ÄQU) und
b) die tautologische Transformation von universell bejahten *Termen*.

Die Äquivalenzumformung erfolgt durch wechselseitigen Austausch äquivalenter Quotienten gemäß Tabelle 1-1 bzw. 1-3. Bspw. kann der Quotient "¬◘x(Sx→¬Px)" ersetzt werden durch sein Äquivalent: "□x(Sx→¬Px)".

Als tautologische Transformationen gelten alle Umformungen von Termen, die eine aussagenlogische Tautologie darstellen. So kann der Ausdruck "(S→P)" tautologisch transformiert werden in "(¬S ∨ P)" bzw. der Ausdruck "¬(S ∨ P)" nach dem DeMorgan-Gesetz in "(¬S ∧ ¬P)". Am häufigsten gelangt der Modus tollens (MT) zur Anwendung, d.h. der Übergang von "(Sx→Px)" zu "(¬Px→¬Sx)".

Zu beachten ist, dass tautologische Umformungen *nur bei Quotienten mit dem Allquantor* erfolgen dürfen, da andernfalls der wahrheitserhaltende Charakter der Umformung nicht gewährleistet ist. Quotienten mit dem *Keinquantor* können ggf. durch ÄQU in eine äquivalente Allform umgewandelt werden. Zum Beispiel kann "□x(Sx→Px)" transformiert werden in: "■x(Sx→¬Px)", und dies wiederum mit dem Modus tollens in: "■x(Px→¬Sx)".

Cave: Die direkte Anwendung des MT auf "□x(Sx→Px)" führt zu: "□x(¬Px→¬Sx)"; dies wiederum ergibt durch ÄQU: "■x(¬Px→Sx)"!

1.12. Negation von Quotienten

Es gibt zwei Arten, Quotienten zu verneinen: indem der Quantor negiert wird oder indem das Prädikat negiert wird. Verneinung des Quantors heißt *Negation erster Art*, Verneinung des Prädikats *Negation zweiter Art*. Die Tabellen 1-5 und 1-6 zeigen Beispiele für beide.

Tab. 1-5: Negation der ersten Art:

Quotient	Negation I
■x(Sx→Px)	¬■x(Sx→Px)
◘x(Sx→Px)	¬◘x(Sx→Px
□x(Sx→¬Px)	¬□x(Sx→¬Px)

Tab. 1-6: Negation der zweiten Art:

Quotient	Negation II
■x(Sx→Px)	■x(Sx→¬Px)
◘x(Sx→Px)	◘x(Sx→¬Px)
□x(Sx→¬Px)	□x(Sx→Px)

Bei der Negation erster Art darf von der Wahrheit des Quotienten auf die Falschheit seiner negierten Form geschlossen werden – nicht jedoch bei der Negation zweiter Art: hier verhalten sich die Dinge komplizierter. Man vergegenwärtige sich hierzu, was oben (1.9.) zur Quantorenmetalogik gesagt wurde: logische Umformungen von Termen – wozu auch die Negation des Prädikats zählt – sind nur bei *universell bejahenden Quotienten* zulässig. Bei den anderen verzerrt die "logische Kraft" des Quantors das Ergebnis. Daher führt die Verneinung des Prädikats nicht zu einem kontradiktorischen Widerspruch wie etwa bei "Hans ist belesen" und "Hans ist nicht belesen".

1.13. Widersprüche zwischen Quotienten

Die unterschiedlichen Arten der Negierung bewirken, dass sich Quotienten auf unterschiedliche Weise widersprechen können. Negationen erster Art erzeugen kontradiktorische Widersprüche; Negationen zweiter Art erzeugen konträre und subkonträre Widersprüche.

1.13.1. *Kontradiktorische Widersprüche* liegen vor, wenn ein Quotient zugleich behauptet und negiert wird, also in der Form "Q ∧ ¬Q". Beispiel: "Alle Philosophen sind belesen, und nicht alle Philosophen sind belesen" bzw. "■x(Px→Bx) ∧ ¬■x(Px→Bx)".

Durch Äquivalenzumformung der so negierten Quotienten zeigt sich, dass

- die Negation von Quotienten des A-Typs stets zu Quotienten des O-Typs führt und umgekehrt (siehe obiges Beispiel);
- die Negation von Quotienten des E-Typs stets zu Quotienten des I-Typs führt und umgekehrt.

Demnach stehen die Quotienten der Typen A und O zueinander in kontradiktorischem Widerspruch; ebenso die Quotienten der Typen E und I (vgl. Tabellen 1-7 und 1-8).

Tab. 1-7: Negation von Quotienten des A-Typs ergibt Quotienten des O-Typs und umgekehrt.

Quotient Typ A (= negierter Quotient vom Typ O)	Quotient Typ O (= negierter Quotient vom Typ A)
■x(Sx→Px)	¬■x(Sx→Px)
□x(Sx→¬Px)	¬□x(Sx→¬Px)
¬◘x(Sx→¬Px)	◘x(Sx→¬Px)

Tabelle 8: Negation von Quotienten des E-Typs ergibt Quotienten des I-Typs und umgekehrt.

Quotient Typ E (= negierter Quotient vom Typ I)	Quotient Typ I (= negierter Quotient vom Typ E)
■x(Sx→¬Px)	¬■x(Sx→¬Px)
□x(Sx→Px)	¬□x(Sx→Px)
¬◘x(Sx→Px)	◘x(Sx→Px)

Bei kontradiktorischem Widerspruch zwischen Q und ¬Q gilt:
- ist Q wahr, dann ist ¬Q falsch;
- ist Q falsch, dann ist ¬Q wahr;
- ist ¬Q wahr, dann ist Q falsch;
- ist ¬Q falsch, dann ist Q wahr.

1.13.2. *Konträre und subkonträre Widersprüche* ergeben sich durch die Verneinung von Prädikaten in Quotienten. Sie haben die allgemeine Form: "•x(Sx→Px) ∧ •x(Sx→¬Px)", wie zum Beispiel:
"Alle Philosophen sind belesen, und alle Philosophen sind nicht belesen" bzw. "■x(Px→Bx) ∧ ■x(Px→¬Bx)".

Durch Äquivalenzumformungen der so negierten Quotienten lässt sich zeigen, dass
- die Prädikatnegation bei Quotienten des A-Typs stets zu Quotienten des E-Typs führt und umgekehrt;
- die Prädikatnegation bei Quotienten des I-Typs stets zu Quotienten des O-Typs führt und umgekehrt.

Die Tabellen 1-9 und 1-10 veranschaulichen den Zusammenhang.

Tab. 1-9: Prädikatnegation bei Quotienten des A-Typs ergibt Quotienten des E-Typs und umgekehrt. Das Zeichen "↵┘└↳" bedeutet "konträr zu".

Quotient vom Typ A		Quotient vom Typ E
■x(Sx→Px)	↵┘└↳	■x(Sx→¬Px)
□x(Sx→¬Px)	↵┘└↳	□x(Sx→Px)
¬◘x(Sx→¬Px)	↵┘└↳	¬◘x(Sx→Px)

Tab. 1-10: Prädikatnegation bei Quotienten des I-Typs ergibt Quotienten des O-Typs und umgekehrt. Das Zeichen "↰┐┌↱" bedeutet: "subkonträr zu".

Quotient vom Typ I		Quotient vom Typ O
¬■x(Sx→¬Px)	↰┐┌↱	¬■x(Sx→Px)
¬□x(Sx→Px)	↰┐┌↱	¬□x(Sx→¬Px)
◘x(Sx→Px)	↰┐┌↱	◘x(Sx→¬Px)

Zwischen prädikatnegierten Quotienten besteht *kein eindeutiges logisches Verhältnis*, sodass von der Wahrheit des einen automatisch auf die Falschheit des anderen geschlossen werden dürfte! Statt dessen müssen zwei Fälle unterschieden werden: der konträre und der subkonträre Widerspruch.

1.13.3. Ein *konträrer Widerspruch* besteht zwischen Quotienten des A-Typs und des E-Typs; d.h. die Prädikatnegation eines Quotienten vom A-Typ ergibt einen Quotienten vom E-Typ, und umgekehrt. Konträre Quotienten können zugleich falsch, aber nicht zugleich wahr sein. Zum Beispiel:
- "■x(Mx→Kx)": "alle Menschen sind Kriminelle";
- "■x(Mx→¬Kx)": "alle Menschen sind keine Kriminellen".

Hier sind offenkundig beide Quotienten falsch; die Wahrheit ist: "einige Menschen sind kriminell und einige Menschen sind nicht kriminell". Allerdings ist der Fall möglich, dass *ein* Quotient wahr ist, wie in:
- "■x(Mx→Sx)": "alle Menschen sind sterblich";
- "■x(Mx→¬Sx)": "alle Menschen sind unsterblich".

In diesem Fall muss der andere Quotient falsch sein: es können nicht beide wahr sein.

Bei konträrem Widerspruch folgt also aus der Wahrheit eines Quotienten die Falschheit des prädikatnegierten Äquivalents. Aus der Falschheit hingegen folgt nichts. Es gilt:

- ist "•x(Sx→Px)" wahr, dann ist "•x(Sx→¬Px)" falsch*;
- ist "•x(Sx→Px)" falsch, dann ist "•x(Sx→¬Px)" wahr oder falsch*;
- ist "•x(Sx→¬Px)" wahr, dann ist "•x(Sx→Px)" falsch*;
- ist "•x(Sx→¬Px)" falsch, dann ist "•x(Sx→¬Px)" wahr oder falsch*.

*Diese Regel gilt nur für Quotienten des A-Typs und des E-Typs, wobei der Quantor innerhalb jeder Zeile gleichbleiben muss!

1.13.4. Ein *subkonträrer Widerspruch* besteht zwischen Quotienten des I-Typs und des O-Typs. D.h., die Prädikatnegation eines Quotienten vom I-Typ ergibt einen Quotienten vom O-Typ, und umgekehrt. Subkonträre Quotienten können zugleich wahr, aber nicht zugleich falsch sein. Zum Beispiel:

- "□x(Mx→Kx)": "einige Menschen sind Kriminelle";
- "□x(Mx→¬Kx)": "einige Menschen sind keine Kriminellen".

Hier sind offenkundig beide Quotienten wahr. Allerdings ist der Fall möglich, dass ein Quotient falsch ist, wie in:

- "□x(Mx→Sx)": "einige Menschen sind sterblich";
- "□x(Mx→¬Sx)": "einige Menschen sind unsterblich".

In diesem Fall muss der andere Quotient wahr sein: es können nicht beide falsch sein.

Bei subkonträrem Widerspruch folgt aus der Falschheit eines Quotienten die Wahrheit seines prädikatnegierten Äquivalents. Bei seiner Wahrheit folgt nichts. Es gilt:

- ist "•x(Sx→Px)" wahr, dann ist "•x(Sx→¬Px)" wahr oder falsch*;
- ist "•x(Sx→Px)" falsch, dann ist "•x(Sx→¬Px)" wahr *;
- ist "•x(Sx→¬Px)" wahr, dann ist "•x(Sx→Px)" wahr oder falsch*;
- ist "•x(Sx→¬Px)" falsch, dann ist "•x(Sx→Px)" wahr*.

*Diese Regel gilt nur für Quotienten des A-Typs und des E-Typs, wobei der Quantor innerhalb jeder Zeile gleichbleiben muss!