Neotraditionelle Quantorenlogik II

Der Essay "Neotraditionelle Quantorenlogik" beinhaltet eine formalisierte Version der traditionellen (auf Aristoteles zurückgehenden) Logik. Er besteht aus drei Teilen:

I. Grundlagen
II. Neotraditionelle Monologistik
III. Neotraditionelle Syllogistik.

Der Teil II des Essays behandelt die monologen Schlüsse, d.h. Schlüsse, die aus nur einer Prämisse folgen. Zum besseren Verständnis empfiehlt sich, zuvor den ersten Essay (Grundlagen) zu lesen.

Teil II: Neotraditionelle Monologistik

2.1. Gegenstandsgebiet der Monologistik

Monologismen sind logische Schlüsse aus *nur einer* Prämisse. Sie unterscheiden sich darin von den *Syllogismen*, wo die Folgerung aus zwei (oder auch mehreren) Prämissen gezogen wird. Während die Folgerung bei den Syllogismen "Konklusion" heißt, heißt sie bei den Monologismen "Sequens".

Beispiele für monologistische Schlüsse:
a) "Alle Katholiken sind Christen. Also ist kein Katholik Nicht-Christ."
b) "Alle Katholiken sind Christen. Also sind einige Christen Katholiken."
c) "Kein Protestant ist Katholik. Also ist kein Katholik Protestant."

Die Beispielsätze besitzen folgende logische bzw. monologistische Struktur:
a) ■x(Kx→Cx), daher □x(Kx→¬Cx);
b) ■x(Kx→Cx), daher ◘x(Cx→Kx);
c) □x(Px→Kx), daher □x(Kx→Px).

Sind solche Schlüsse gültig? Analog zu den Syllogismen muss auch bei den Monologismen die Gültigkeit der Schlussform untersucht und bewiesen werden. Gültig ist ein Monologismus, wenn das Sequens aus der Prämisse logisch folgt, sodass bei wahrem Vordersatz auch das Sequens wahr sein muss.

Betrachten wir die obigen Beispiele: Satz a) ist leicht zu erkennen als ein Schluss durch Äquivalenzumformung (vgl. Tabelle 1-3). Vordersatz und Sequens sind äquivalent; ihre (gegenseitige) Herleitung ist also gültig.

Schwerer zu durchschauen sind die beiden anderen Monologismen. Hier liegen keine äquivalenten Quotienten vor; die Gültigkeit des Schlusses – sofern gegeben – muss auf anderen logischen Beziehungen beruhen. Intuitiv halten wir beide vermutlich für gültig – aber eine Intuition ist kein Beweis.

Obwohl monologistische Schlüsse im alltäglichen Denken eine große Rolle spielen, machen sich die wenigsten Menschen Gedanken über ihre logischen Grundlagen. Die Untersuchung dieser Grundlagen und der Aufweis gültiger monologistischer Schlussschemata ist das Fachgebiet der Monologistik.

2.2. Monologistische Figuren und Modi

Wie in den Beispielsätzen ersichtlich, können Subjekt (S) und Prädikat (P) im Sequens ihre Position beibehalten oder vertauschen. Es gibt demnach zwei monologistische Figuren:

1) •x(Sx→Px), daher •x(Sx→Px), siehe oben a.),
2) •x(Sx→Px), daher •x(Px→Sx), siehe oben b.) und c.).

Die Schlüsse der ersten monologistischen Figur heißen "konservative Schlüsse" (weil S und P ihre Position beibehalten); die Schlüsse der zweiten Figur heißen "konverse Schlüsse" (weil S und P ihre Position vertauschen).

Innerhalb jeder Figur können die Quotienten in unterschiedlichen Kombinationen (Modi) vorkommen. So kann der All-Quotient in der Prämisse der 1. Figur insgesamt vier Modi bilden:

■x(Sx→Px), daher ■x(Sx→Px),
■x(Sx→Px), daher □x(Sx→Px),
■x(Sx→Px), daher ◘x(Sx→Px),
■x(Sx→Px), daher ◘x(Sx→¬Px).

Kombiniert man auf die selbe Weise alle vier Quotiententypen, so ergeben sich pro Figur 4 x 4 = 16 Modi. Bei zwei Figuren ergeben sich 32 Modi, d.h. 32 mögliche Quotientenkombinationen, von denen aber nur einige gültig sind.

Die Angabe der gültigen Schlussschemata erfolgt nicht für einzelne Quotienten, sondern für Quotiententypen – etwa in der Form: "A, daher I". Innerhalb eines Typs dürfen beliebige äquivalente Quotienten eingesetzt werden; der Schluss bleibt dabei immer gültig.

2.3. Methoden der Monologistik

Grundlage monologistischer Schlüsse sind die logischen Beziehungen, die zwischen den Quotiententypen bestehen (insbesonders die Äquivalenzen und die Widersprüche, vgl. 1.13.). Gültig ist ein Schluss, wenn das Sequens aus der Prämisse folgt bzw. hergeleitet werden kann; ungültig, wenn zwischen den beiden ein Widerspruch besteht. Letzteres kann im Sinn der indirekten Beweisführung genutzt werden.

Dabei ist zu beachten, was bereits gesagt wurde (1.13.): es gibt unterschiedliche Arten von Widersprüchen:

- Quotienten des Typs A und O und des Typs E und I sind jeweils zueinander kontradiktorisch;
- Quotienten der Typen A und E sind zueinander konträr, und
- Quotienten der Typen I und O sind zueinander subkonträr.

In praktischer Hinsicht bedeutet das:

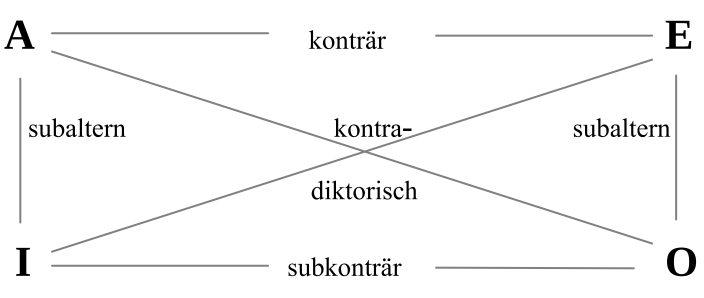
- Bei *kontradiktorischem* Widerspruch zwischen zwei Quotienten R und Q folgt aus der Wahrheit von R die Falschheit von Q, und umgekehrt. Es gilt: R↔¬Q und Q↔¬R.
- Bei *konträrem* Widerspruch zwischen R und Q folgt aus der Wahrheit von R die Falschheit von Q, nicht aber aus der Falschheit von R die Wahrheit von Q. Es gilt: R→¬Q und Q→¬R.
- Bei *subkonträrem* Widerspruch zwischen R und Q folgt aus der Falschheit von R die Wahrheit von Q, nicht aber aus der Wahrheit von R die Falschheit von Q. Hier gilt: ¬R→Q und ¬Q→R).

Bei der Beweisführung (Herleitung gültiger Schlussschemata) sind folgende Operationen zulässig:
a) Äquivalenzumformungen (ÄQU) von *Quotienten*: äquivalente Quotienten dürfen füreinander ausgetauscht werden. Welche Quotienten äquivalent sind, ersieht man aus Tabelle 1 (im Teil I des Essays).
b) Tautologische Umformung von *Termen* mithilfe des Modus tollens (MT): (S→P) ⇔ (¬P→¬S). Diese Umformungen dürfen nur bei *Allsätzen* vorgenommen werden darf, da nur sie die Wahrheit des Terms behaupten. Bei den Quotienten mit den Quantoren "kein" und "einige" sind Termumformungen unzulässig.

Teil II/1: Konservative Schlüsse

2.4. Logische Quadrate
Schon die traditionelle Logik versuchte, die logischen Beziehungen zwischen den vier Quotiententypen in einem einprägsamen Schema zu veranschaulichen: dem logischen Quadrat.

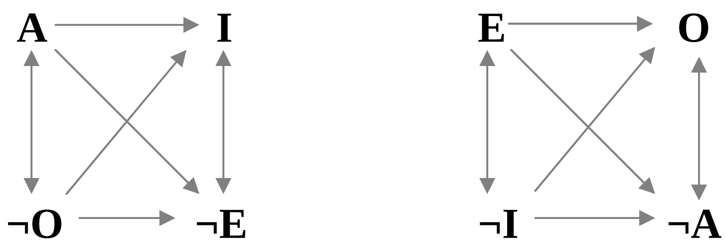
Das traditionelle logische Quadrat enthält an seinen Ecken jeweils die vier Satztypen, beginnend mit SaP links oben und endend mit SiP links unten (im Uhrzeigersinn gereiht). Die Seiten und die Diagonalen des Quadrats beschreiben die logischen Beziehungen zwischen den Satztypen:



Dieses Schema ist wenig hilfreich, wenn es darum geht, die Herleitbarkeit gültiger Schlussschemata zu beurteilen. Da die Beziehungen zwischen den Quotiententypen nicht in einheitlicher Form (z.B. als Implikationspfeile), sondern qualitativ dargestellt sind, ist einige Tüftelei erforderlich, um die Gültigkeit mancher Schlüsse – z.B. von non-O auf I – herauszufinden. Für den Ungeübten ist dies keine attraktive Methode.

Ein viel hilfreicheres Schema lässt sich entwerfen, wenn man die im Quadrat dargestellten logischen Beziehungen vereinheitlicht, und zwar zu Konditionalen ("wenn – dann"). Dazu muss das Quadrat geteilt werden; d.h. es gibt zwei neotraditionelle logische Quadrate: eines für die bejahenden (affirmativen) Quotiententypen (A, I, ¬E, ¬O) und eines für die verneinenden (negierenden) Quotiententypen (E, O, ¬A, ¬I). Die einzelnen Typen erscheinen jeweils an den Ecken der Quadrate. Die Seiten und Diagonalen jedes Quadrats werden durch Implikationspfeile gebildet; z.B. bedeutet A → I die Herleitbarkeit von I aus A, also die Gültigkeit des betreffenden Schlusses. An diesen Quadraten lässt sich mit wenigen Blicken erkennen, welche monologistischen Schlussschemata gültig sind:

Logisches Quadrat der bejahenden Urteile | Logisches Quadrat der verneinenden Urteile



Der Aufbau der Quadrate ist einfach: oben stehen jeweils die bejahenden Quotienten, unten die verneinenden. Die Pfeile zwischen ihnen geben die Folgebeziehung an, d.h. in die Pfeilrichtung darf geschlossen werden. Die beiden Quadrate zeigen alle gültigen konservativen Schlüsse an – mit einer Ausnahme: der Schluss innerhalb desselben Quotiententyps, also von A auf A, von E auf E, usw. Da dieser Schluss trivial ist (und praktisch bedeutungslos), braucht er im Quadrat nicht eingezeichnet zu werden.

2.5. Gültige konservative Schlüsse (gültige Modi der ersten Figur)

Wie an den obigen Quadraten zu erkennen ist, gibt es pro Quadrat acht Konditionalbeziehungen (Pfeile) zwischen den Quotiententypen; also acht gültige Schlussschemata. Man sieht weiters, dass pro Quadrat vier Pfeile unten beginnen (bei den negativen Quotiententypen), und vier Pfeile oben (bei den bejahenden Quotiententypen). Es gibt demnach pro Quadrat vier Schlussschemata mit *negierter Prämisse*, und vier Schlussschemata mit *behauptender Prämisse* (vgl. Tabelle 2-1).

Tab. 2-1: Gültige Schlussschemata der ersten monologistischen Figur

Nr.	**behauptende Prämisse**	**negierte Prämisse**
0	A→A, E→E, usw.	¬A→¬A, ¬E→¬E, usw.
1	A→¬E	¬A→O
2	A→I	¬E→I
3	A→¬O	¬O→A
4	E→¬A	¬O→¬E
5	E→O	¬O→I
6	E→¬I	¬I→¬A
7	O→¬A	¬I→E
8	I→¬E	¬I→O

Die Schlussschemata mit negativer Prämisse lassen sich allesamt (mittels Modus tollens) aus den Schemata mit behauptender Prämisse herleiten; ihre Auflistung in Tabelle 2-1 erfolgt daher mehr aus praktischen denn prinzipiellen Gründen.

2.6. Herleitung der gültigen monologistischen Schlussschemata

2.6.0. Idiotypische Schlüsse

Die Schlüsse der Form "A→A", usw., also Herleitungen innerhalb desselben Typs, sind trivial; sie beruhen auf der Äquivalenz von Prämisse und Sequens. Das Schlussschema umfasst Formen wie:
"■x(Sx→Px), daher ■x(Sx→Px)",
"□x(Sx→Px), daher ■x(Sx→¬Px)",
"◘x(Sx→Px), daher ¬■x(Sx→¬Px)", usw.

2.6.1. Schlüsse der Form "A, daher ¬E"

Beispiel: "■x(Sx→Px), daher ¬□x(Sx→Px)"
"Wenn alle Christen getauft sind, dann ist nicht der Fall, dass kein Christ getauft ist".

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, dass das Sequens falsch ist.
0) ■x(Sx→Px) // Prämisse
1) ¬□x(Sx→Px) // Sequens
2) □x(Sx→Px) // Annahme: falsches Sequens
3) ■x(Sx→¬Px) // durch ÄQU von 2) (E-Typ)
Wodurch zwischen 0) und 3) ein konträrer Widerspruch eintritt.

Bei konträrem Widerspruch können nicht beide Quotienten wahr sein.
Ist daher die Prämisse 0) wahr, muss das Sequens 2) falsch sein. Also gilt:
"■x(Sx→Px), daher ¬□x(Sx→Px)".

2.6.2. Schlüsse der Form "A, daher I"

Beispiel: "■x(Sx→Px), daher ◘x(Sx→Px)"
"Wenn alle Christen getauft sind, dann sind (auch) einige Christen getauft";

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, das Sequens sei falsch:
0) ■x(Sx→Px) // Prämisse
1) ◘x(Sx→Px) // Sequens
2) ¬◘x(Sx→Px) // Annahme: falsches Sequens
3) ■x(Sx→¬Px) // durch ÄQU von 2) (E-Typ)
Wodurch zwischen 0) und 3) ein konträrer Widerspruch eintritt.

Bei konträrem Widerspruch können nicht beide Quotienten wahr sein.
Ist daher die Prämisse 0) wahr, muss das Sequens 2) falsch sein. Also gilt:
"■x(Sx→Px), daher ◘x(Sx→Px)".

2.6.3. Schlüsse der Form "A, daher ¬O"

Beispiel: "■x(Sx→Px), daher ¬◘x(Sx→¬Px)"
"Wenn alle Christen getauft sind, dann ist kein Christ ungetauft." (eig.:"Wenn alle Christen getauft sind, dann sind nicht einige Christen nicht getauft.")

Herleitung:

Durch indirekten Beweis (wobei bereits bekannt ist, dass zwischen Quotienten vom A-Typ und O-Typ ein kontradiktorischer Widerspruch besteht, vgl. 1.13.):
0) ■x(Sx→Px) // Prämisse
1) ¬◘x(Sx→¬Px) // Sequens
2) ◘x(Sx→¬Px) // Annahme: falsches Sequens
3) ¬■xSx→Px) // durch ÄQU von 2) (A-Typ)
Wodurch ein kontradiktorischer Widerspruch zwischen 0) und 3) auftritt.

Bei kontradiktorischem Widerspruch von 2 Quotienten R und Q ist entweder R wahr und Q falsch, oder R falsch und Q wahr.
Ist also die Prämisse 0) wahr, dann ist das Sequens 2) falsch, und es gilt:
"■x(Sx→Px), daher ¬◘x(Sx→¬Px)";

Ist hingegen das Sequens 2) wahr, dann ist die Prämisse 0) falsch und es gilt:
"¬■x(Sx→Px), daher ◘x(Sx→¬Px)".
Mit letzterer Formel ist ein weiteres Schlussschema hergeleitet, nämlich vom negierten A-Typ auf den O-Typ (vgl. 2.6.9).

2.6.4. Schlüsse der Form "E, daher ¬A"

Beispiel: "□x(Sx→Px), daher ¬■x(Sx→Px)".
"Kein Katholik ist Protestant, daher sind nicht alle Katholiken Protestanten".

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, das Sequens sei falsch:
0) □x(Sx→Px) // Prämisse
1) ¬■x(Sx→Px) // Sequens
2) ■x(Sx→Px) // Annahme: falsches Sequens
3) □x(Sx→¬Px) // durch ÄQU von 2) (A-Typ)
Wodurch zwischen 0) und 3) ein konträrer Widerspruch eintritt.

Bei konträrem Widerspruch können nicht beide Quotienten wahr sein.
Ist daher die Prämisse 0) wahr, muss das Sequens 2) falsch sein. Also gilt:
"□x(Sx→Px), daher ¬■x(Sx→Px)".

2.6.5. Schlüsse der Form "E, daher ¬I"

Beispiel: "□x(Sx→Px), daher ¬◘x(Sx→Px)".
"Kein Katholik ist Protestant, daher sind nicht einige Katholiken Protestanten".

Herleitung:

Durch indirekten Beweis (wobei bereits bekannt ist, dass zwischen Quotienten vom E-Typ und I-Typ ein kontradiktorischer Widerspruch besteht, vgl. 1.13.):
0) □x(Sx→Px) // Prämisse
1) ¬◘x(Sx→Px).// Sequens
2) ◘x(Sx→Px) // Annahme: falsches Sequens
3) ¬□x(Sx→Px) // durch ÄQU von 3) (I-Typ)
Wodurch ein kontradiktorischer Widerspruch zwischen 0) und 3) auftritt.

Bei kontradiktorischem Widerspruch von 2 Quotienten A und B ist entweder A wahr und B falsch, oder B falsch und A wahr.
Ist also die Prämisse 0) wahr, dann ist das Sequens 2) falsch, und es gilt:
"□x(Sx→Px), daher ¬◘x(Sx→Px)".

Ist hingegen das Sequens 2) wahr, dann ist die Prämisse 0) falsch und es gilt:
"¬□x(Sx→Px), daher ◘x(Sx→Px)".
Mit letzterer Formel ist ein weiteres Schlussschema hergeleitet, nämlich vom negierten E-Typ auf den I-Typ (vgl. 2.6.10.).

2.6.6. Schlüsse der Form "E, daher O"

Beispiel: "□x(Sx→Px), daher ◘x(Sx→¬Px)".
"Kein Katholik ist Protestant, daher sind einige Katholiken nicht Protestanten".

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, das Sequens sei falsch:
0) □x(Sx→Px) // Prämisse
1) ◘x(Sx→¬Px) // Sequens
2) ¬◘x(Sx→¬Px) // Annahme: falsches Sequens
3) □x(Sx→¬Px)) // durch ÄQU von 2) (A-Typ)
Wodurch zwischen 0) und 3) ein konträrer Widerspruch eintritt.

Bei konträrem Widerspruch können nicht beide Quotienten wahr sein.
Ist daher die Prämisse 0) wahr, muss das Sequens 2) falsch sein. Also gilt:
"□x(Sx→Px), daher ◘x(Sx→¬Px)".

2.6.7. Schlüsse der Form "O, daher ¬A"

Beispiel: "◘x(Sx→¬Px), daher ¬■x(Sx→Px)".
"Wenn einige Asiaten keine Christen sind, dann sind nicht alle Asiaten Christen."

Herleitung:

Durch Modus tollens (MT) der Form "A, daher ¬O" (vgl. 2.6.2.)

2.6.8. Schlüsse der Form "I, daher ¬E"

Beispiel: "◘x(Sx→Px), daher ¬□x(Sx→Px)".
"Einige Asiaten sind Christen, daher ist nicht der Fall, dass kein Asiat Christ ist."

Herleitung:

Durch MT der Form "E, daher ¬I" (vgl. 2.6.5.)

2.6.9. Schlüsse der Form "¬A, daher O"

Beispiel: "¬■x(Sx→Px), daher ◘x(Sx→¬Px)".
"Nicht alle Asiaten sind Christen, daher sind einige Asiaten Nicht-Christen."

Herleitung:

Siehe 2.6.3.

2.6.10. Schlüsse der Form "¬E, daher I"

Beispiel: "¬□x(Sx→Px), daher ◘x(Sx→Px)".
"Es ist nicht der Fall, dass kein Asiat Christ ist, daher sind einige Asiaten Christen."

Herleitung:

Siehe 2.6.5.

2.6.11. Schlüsse der Form "¬O, daher A"

Beispiel: "¬❑x(Sx→¬Px), daher ■x(Sx→Px)".
"Es ist nicht der Fall, dass einige Mütter keine Frauen sind, daher sind alle Mütter Frauen."

Herleitung:

Durch MT der Form "¬A, daher O" (vgl. 2.6.9.).

2.6.12. Schlüsse der Form "¬O, daher ¬E"

Beispiel: "¬❑x(Sx→¬Px), daher ¬□x(Sx→Px)".
"Es ist nicht der Fall, dass einige Mütter keine Frauen sind, daher ist nicht der Fall, dass keine Mutter eine Frau ist".

Herleitung:

Durch MT der Form "E, daher O" (vgl. 2.6.6.).

2.6.13. Schlüsse der Form "¬O, daher I"

Beispiel: "¬❑x(Sx→¬Px), daher ❑x(Sx→Px)".
"Es ist nicht der Fall, dass einige Mütter keine Frauen sind, daher sind einige Mütter Frauen".

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, das Sequens sei falsch:
0) ¬❑x(Sx→¬Px) // Prämisse
1) ❑x(Sx→Px) // Sequens
2) ¬❑x(Sx→Px) // Annahme: falsches Sequens
3) ■x(Sx→¬Px) // durch ÄQU von 2)
4) ■x(Sx→Px) // durch ÄQU von 0)
Wodurch ein konträrer Widerspruch zwischen 0) und 2) eintritt

Bei konträrem Widerspruch können nicht beide Quotienten wahr sein.
Ist daher die Prämisse 0) wahr, muss das Sequens 2) falsch sein. Also gilt:
"¬❑x(Sx→¬Px), daher ❑x(Sx→Px)".

2.6.14. Schlüsse der Form "¬I, daher ¬A"

Beispiel: "¬❑x(Sx→Px), daher ¬■x(Sx→Px)"
"Wenn nicht einige Rosen blau sind, dann sind nicht alle Rosen blau".

Herleitung:

Durch MT der Form "A, daher I" (vgl. 2.6.2.).

2.6.15. Schlüsse der Form "¬I, daher E"

Beispiel: "¬❑x(Sx→Px), daher □x(Sx→Px)"
"Wenn nicht einige Rosen blau sind, dann ist keine Rose blau".

Herleitung:

Durch MT der Form "¬E, daher I" (vgl. 2.6.10.).

2.6.16. Schlüsse der Form "¬I, daher O"

Beispiel: "¬□x(Sx→Px), daher □x(Sx→¬Px)"
"Wenn nicht der Fall ist, dass einige Rosen blau sind, dann sind einige Rosen nicht blau".

Herleitung:
Durch MT der Form "¬O, daher I" (vgl. 2.6.13.).

Teil II/2: Konverse Schlüsse

2.7. Konverse Urteile in der traditionellen Logik

Im logischen Sinn bedeutet "Konversion" die Vertauschung von Subjekt und Prädikat eines Satzes; wie z.B. in:

a) "Alle Katholiken sind Christen, daher sind einige Christen Katholiken";
b) "Kein Katholik ist Baptist, daher ist kein Baptist Katholik";
c) "Einige Amerikaner sind keine Weißen, daher sind einige Weiße keine Amerikaner".

Die Gültigkeit der konversen Schlüsse ist im Allgemeinen schwieriger einzusehen als die der konservativen. Bei Letzteren genügt es meist, sich den Sachverhalt deutlich vor Augen zu führen oder mittels Euler-Diagrammen zu veranschaulichen, um die (Nicht-) Stimmigkeit des Schlusses zu erkennen. Konverse Schlüsse hingegen erfordern fast immer angestrengtes Überlegen und – nicht weniger oft – die Suche nach bestätigenden oder widerlegenden Beispielen.

Auf die Schnelle befragt würden vermutlich viele Menschen den obigen Beispielsätzen a), b) und c) zustimmen; d.h. alle drei Schlüsse für gültig halten. Jedoch sind nur a) und b) gültig, während sich für c) leicht ein Gegenbeispiel (mit falschem Sequens) finden lässt:
c') "Einige Züge sind keine Schnellzüge, daher sind einige Schnellzüge keine Züge."

Die traditionelle Logik kennt vier gültige konverse Schlüsse, nämlich:
(1) von SaP auf PiS ("alle S sind P, daher: einige P sind S");
(2) von SeP auf PeS ("kein S ist P, daher: kein P ist S");
(3) von SeP auf PoS ("kein S ist P, daher: einige P sind non-S");
(4) von SiP auf PiS ("einige S sind P, daher: einige P sind S").

Die Schemata (2) und (4) werden "reine" bzw. "symmetrische" konverse Schlüsse genannt, weil die Quantität in der Prämisse und im Sequens gleich bleibt; die beiden anderen heißen "unrein" bzw. "asymmetrisch".

2.8. Weitere konverse Schlüsse

Weitere konverse Schlussschemata erhält man, wenn man das Sequens eines (gültigen) konversen Schlusses als Prämisse eines *konservativen* Schlusses setzt. Das daraus folgende Sequens muss ebenfalls Sequens eines konversen Schlusses sein – nach dem Schlussschema A→B, B→C, daher A→C.

Setzt man demnach die obigen konversen Sequentes PeS, PiS und PoS als Prämissen in gültige konservative Schlussschemata ein, so erhält man als weitere Sequentes:

- von PaS: ¬PeS ("A, daher ¬E"; vgl. 2.6.1),
- von PeS: ¬PaS ("E, daher ¬A"; vgl. 2.6.4.),
- von PeS: ¬PiS ("E, daher ¬I"; vgl. 2.6.5.),
- von PiS: ¬PeS ("I, daher ¬E"; vgl. 2.6.8).

Damit kommen vier weitere konverse Schlussschemata zu den traditionellen vier dazu.

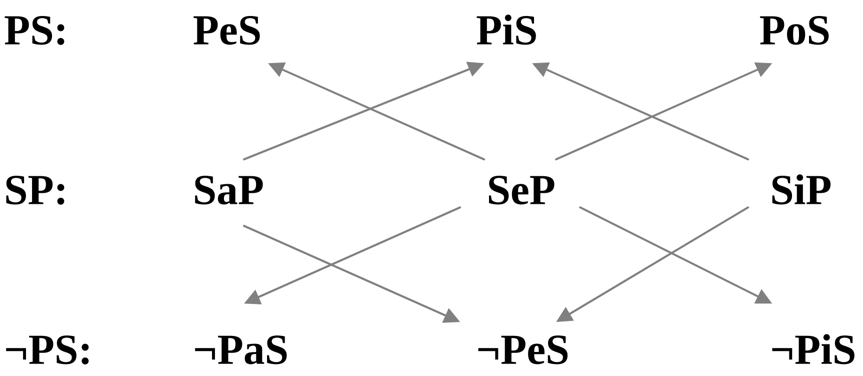
2.9. Gültige konverse Schlüsse: Überblick

Insgesamt gibt es also acht gültige konverse Schlussschemata (die Gültigkeit wird unten (2.11) durch Herleitung bewiesen):

(1) von SaP auf PiS: "■x(Sx→Px), daher ◘x(Px→Sx)";
(2) von SaP auf ¬PeS: "■x(Sx→Px), daher ¬□x(Px→Sx)";
(3) von SeP auf PeS: "□x(Sx→Px), daher □x(Px→Sx)";
(4) von SeP auf PoS: "□x(Sx→Px), daher ¬◘x(Px→Sx)";
(5) von SeP auf ¬PaS: "□x(Sx→Px), daher ¬■x(Px→Sx)";
(6) von SeP auf ¬PiS: "□x(Sx→Px), daher ¬◘x(Px→Sx)";
(7) von SiP auf PiS: "◘x(Sx→Px), daher ◘x(Px→Sx)";
(8) von SiP auf ¬PeS: "◘x(Sx→Px), daher ¬□x(Px→Sx)".

2.10. Das logische Netzwerk der Konversion

Die acht konversen Schlussschemata sind in keine einfache Systematik zu bringen (wie etwa in logische Quadrate). Eine – einigermaßen – anschauliche Art der Darstellung bietet das *logische Netzwerk der Konversion*, das die Quotiententypen als Knotenpunkte und ihre konditionalen Beziehungen als Pfeile darstellt:



Die Anordnung der Knotenpunkte ist folgende: in der mittleren Zeile stehen die Prämissen (als Typen) in der Abfolge A, E und I. Da der Typ O keinen gültigen konversen Schluss zulässt, wird er nicht berücksichtigt. In der oberen und unteren Zeile stehen die Sequentes: in die unteren die negierten, in der oberen die bejahten. Da bei den bejahten Sequentes der Typ A fehlt, beginnt man mit dem Typ E als ersten (linken) Knoten. Bei den verneinten Sequentes fehlt der Typ O, er fällt also weg. Die Pfeile zeigen an, von welcher Prämisse zu welchem Sequens übergegangen werden darf.

2.11. Herleitung der gültigen konversen Schlüsse

Die Herleitung der konversen Schlüsse erfolgt nach den Regeln wie in 2.3. angegeben: durch Äquivalenzumformung (ÄQU) von Quotienten, und durch Umformung von Termen nach dem Modus tollens (MT) bei Quotienten des A-Typs.

2.10.1. Schlüsse der Form "SaP, daher PiS"

Beispiel: "■x(Sx→Px), daher ◘x(Px→Sx)".
"Alle Katholiken sind Christen, daher sind einige Christen Katholiken."

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, das Sequens sei falsch:
0) ■x(Sx→Px) // Prämisse
1) ◘x(Px→Sx)" // Sequens
2) ¬◘x(Px→Sx)" // Annahme: falsches Sequens
3) ■x(Px→¬Sx) // durch ÄQU von 2)
4) ■x(Sx→¬Px) // durch MT aus 3)
Wodurch ein konträrer Widerspruch zwischen 0) und 4) eintritt

Bei konträrem Widerspruch können nicht beide Quotienten wahr sein.
Ist daher die Prämisse 0) wahr, muss das Sequens 2) falsch sein. Also gilt:
"■x(Sx→Px), daher ◘x(Px→Sx)".

2.10.2. Schlüsse der Form "SaP, daher ¬PeS"

Beispiel: "■x(Sx→Px), daher ¬□x(Px→Sx)"
"Alle Katholiken sind Christen, daher ist nicht der Fall, dass kein Christ Katholik ist".

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, das Sequens sei falsch:
0) ■x(Sx→Px) // Prämisse
1) ¬□x(Px→Sx) // Sequens
2) □x(Px→Sx) // Annahme: falsches Sequens
3) ■x(Px→¬Sx) // ÄQU aus 2)
4) ■x(Sx→¬Px) // MT aus 3)
Wodurch ein konträrer Widerspruch zwischen 0) und 4) eintritt

Bei konträrem Widerspruch können nicht beide Quotienten wahr sein.
Ist daher die Prämisse 0) wahr, muss das Sequens 2) falsch sein. Also gilt:
"■x(Sx→Px), daher ¬□x(Px→Sx)".

2.10.3. Schlüsse der Form "SeP, daher PeS"

Beispiel: "□x(Sx→Px), daher □x(Px→Sx)"
"Kein Protestant ist Katholik, daher ist kein Katholik Protestant".

Herleitung:

0) □x(Sx→Px) // Prämisse
1) ■x(Sx→¬Px) // ÄQU aus 0)
2) ■x(Px→¬Sx) // MT aus 1)
3) □x(Px→Sx) // ÄQU aus 2)
Die Formel 3) entspricht dem Sequens: Prämisse und Sequens sind also äquivalent.
Also gilt (vgl. 2.6.0): "□x(Sx→Px), daher □x(Px→Sx)".

2.10.4. Schlüsse der Form "SeP, daher PoS"

Beispiel: "□x(Sx→Px), daher ◘x(Px→¬Sx)".
"Kein Katholik ist Protestant, daher sind einige Protestanten Nicht-Katholiken."

Herleitung:

Die Herleitung dieses Schlussschemas sei nach der in 2.8. angegebenen Methode demonstriert:
1) □x(Sx→Px), daher □x(Px→Sx) // gemäß 2.10.3.
2) □x(Px→Sx), daher ◘x(Px→¬Sx) // gemäß "E, daher O" (2.6.6.)
3) □x(Sx→Px), daher ◘x(Px→¬Sx) // Ersetzung des Sequens in 1) durch Sequens aus 2)

2.10.5. Schlüsse der Form "SeP, daher ¬PaS"

Beispiel: "□x(Sx→Px), daher ¬■x(Px→Sx)"
"Kein Katholik ist Protestant, daher sind nicht alle Protestanten Katholiken".

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, das Sequens sei falsch:
0) □x(Sx→Px) // Prämisse
1) ■x(Sx→¬Px) // ÄQU aus 0)
2) ■x(Px→¬Sx) // MT aus 1)
3) ¬■x(Px→Sx) // Sequens
4) ■x(Px→Sx) // Annahme: falsches Sequens
Wodurch ein konträrer Widerspruch zwischen 2) (Prämisse) und 4) (Sequens) eintritt.

Bei konträrem Widerspruch können nicht beide Quotienten wahr sein.
Ist daher die Prämisse 0) wahr, muss das Sequens 4) falsch sein. Also gilt: "□x(Sx→Px), daher ¬■x(Px→Sx)".

2.10.6. Schlüsse der Form "SeP, daher ¬PiS"

Beispiel: "□x(Sx→Px), daher ¬◘x(Px→Sx)"
"Kein Katholik ist Protestant, daher sind nicht einige Protestanten Katholiken".

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, das Sequens sei falsch:
0) □x(Sx→Px) // Prämisse
1) ■x(Sx→¬Px) // ÄQU aus 0)
2) ■x(Px→¬Sx) // MT aus 1)
3) ¬◘x(Px→Sx) // Sequens
4) ◘x(Px→Sx) // Annahme: falsches Sequens
5) ¬■x(Px→¬Sx) // ÄQU aus 4)
Wodurch ein kontradiktorischer Widerspruch zwischen 2) (Prämisse) und 5) (Sequens) eintritt. Daher gilt: "□x(Sx→Px), daher ¬◘x(Px→Sx)".

2.10.7. Schlüsse der Form "SiP, daher PiS"

Beispiel: "◘x(Sx→Px), daher ◘x(Px→Sx)"
"Einige Katholiken sind Christen, daher sind einige Christen Katholiken."

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, das Sequens sei falsch:
0) ◘x(Sx→Px) // Prämisse
1) ¬■x(Sx→¬Px) // ÄQU von 0)
2) ◘x(Px→Sx) // Sequens
3) ¬◘x(Px→Sx)".// Annahme: falsches Sequens
4) ■x(Px→¬Sx) // durch ÄQU von 2)
5) ■x(Sx→¬Px) // durch MT aus 3)
Wodurch ein kontradiktorischer Widerspruch zwischen 1) (Prämisse) und 5) (Sequens) eintritt. Somit das Sequens 3) falsch und es gilt:
"◘x(Sx→Px), daher ◘x(Px→Sx)".

2.10.8. Schlüsse der Form "SiP, daher ¬PeS"

Beispiel: "◘x(Sx→Px), daher ¬□x(Px→Sx)"
"Einige Asiaten sind Christen, daher ist nicht der Fall, dass kein Asiat Christ ist."

Herleitung:

Durch indirekten Beweis: Annahme, das Sequens sei falsch:
0) ◘x(Sx→Px), // Prämisse
1) ¬□x(Px→Sx) // Sequens
2) ¬◘x(Px→Sx)" // Annahme: falsches Sequens
3) ■x(Px→¬Sx) // durch ÄQU von 2)
4) ■x(Sx→¬Px) // durch MT aus 3)
Wodurch ein konträrer Widerspruch zwischen 0) und 4) eintritt

Bei konträrem Widerspruch können nicht beide Quotienten wahr sein.
Ist daher die Prämisse 0) wahr, muss das Sequens 2) falsch sein. Also gilt:
"■x(Sx→Px), daher ◘x(Px→Sx)".

2.11. Konversion und Existenz

Konverse Schlüsse werden seit alters her scheel beäugt, weil sie – angeblich – Existenzannahmen erfordern, um gültig zu sein. Betrachten wir ein Beispiel:

Aus der allgemein-bejahenden Prämisse "■x(Sx→Px)" folgen:
(1) das konservative Sequens: "◘x(Sx→Px)" (vgl. 2.6.2) und
(2) das konverse Sequens: "◘x(Px→Sx)" (vgl 2.10.1).

Die Gültigkeit des konservativen Schlusses (1) einzusehen, bereitet keine Probleme – auch dann nicht, wenn er über nicht-existente Dinge geht, wie z.B. in: "Alle Marsbewohner sind hochnäsig, daher sind einige Marsbewohner hochnäsig."

Anders verhält es sich mit dem konversen Schluss (2): "Alle Marsbewohner sind hochnäsig, daher sind einige Hochnäsige Marsbewohner." Viele Menschen lehnen es ab, diesen Schluss für gültig zu halten – bzw. akzeptieren ihn nur unter dem Vorbehalt, dass es Marsbewohner gibt.

Diese Auffassung ist auch unter Logikern weit verbreitet; sie ist mit der mathematischen Prädikatenlogik seit Frege und Russell fest verbunden. Auch Quine (*Grundzüge der Logik*, §§13-15) ist der Meinung, dass Syllogismen, zu deren Herleitung konverse Schlüsse (als Zwischenschritte) nötig sind, nur Gültigkeit besitzen, wenn die Zusatzprämisse "es gibt ..." bzw. "es existieren ..." gesetzt wird. Demnach müsste der obige Schluss in kompletter Form lauten:

Prämisse: "Alle Marsbewohner sind hochnäsig".
Zusatzprämisse: "Marsbewohner existieren."
Daher: "Einige Hochnäsige sind Marsbewohner."

Dagegen ist Folgendes einzuwenden: Grundsätzlich macht die Logik keine Existenzannahmen. Ihr geht es allein um formale Beziehungen zwischen Begriffen und Urteilen, unabhängig davon, ob das Designat der Begriffe existiert oder nicht (ob ihre Extension leer ist oder nicht). Die Logik ist ontologisch neutral – besser gesagt ontologisch *hypothetisch*: alle ihre Schlussschemata sind gültig *unter der Bedingung*, *dass die Prämissen wahr sind*. Ob diese Bedingung erfüllt ist, ist aber eine empirische Frage, die die Logik nicht beantworten kann und muss. Sie stellt lediglich fest, dass – falls die Prämissen wahr sind – auch die Konklusion wahr sein muss.

Die Gültigkeit des Schlussschemas wird also durch die Wahrheit oder Falschheit der Prämissen nicht beeinträchtigt. Bei falschen Prämissen ist zwar die Konklusion möglicherweise falsch, der Schluss aber bleibt gültig. Es kommt also bei der obigen Auffassung zu einer unzulässigen Verquickung von Gültigkeit und Wahrheit.

Die *Wahrheit* (von Sätzen) wiederum wird unzulässig junktimiert mit der *Existenz* der Individuen (Subjekte), über die der Satz spricht. Demnach sei – so explizit z.B. Russell in: *On Denoting* – die Existenz des Subjekts eine notwendige Bedingung der Wahrheit jeder Aussage über dieses Subjekt. Nach dieser Sichtweise ist der obige Satz ("alle Marsbewohner sind hochnäsig") falsch, weil es keine Marsbewohner gibt. – Dagegen steht, dass dieser Satz gar keine Aussage über die Existenz von Marsbewohnern macht, sondern über eine Eigenschaft, die ihnen zukommt. Das Konzept der Wahrheit – als Übereinstimmung von Behauptung und Tatsachen – käme gehörig ins Wanken, wenn es an einem ganz anderen Kriterium bemessen würde als eben jener Übereinstimmung von Behauptung und Tatsachen. Man belässt es besser dabei, den Wahrheitsstatus mancher Sätze – z.B. jener über nicht-existente Dinge – als unbekannt (oder unbestimmt) hinzunehmen.

Ergo: gültige konverse Schlüsse sind in ontologischer Hinsicht ebenso unbedenklich wie konservative; eine zusätzlich Existenzprämisse ist nicht nötig. Denn die Absicherung vor einer falschen Folgerung liegt bereits im Grundkonzept jedes Schlusses, welches lautet: *nur falls* die Prämisse wahr ist, ist auch die Folgerung wahr.